ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 40 January 1997 No. 1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211 002

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 1, January, 1997.

विज्ञान की भाषा *

डॉ० हरदेव बाहरी

आप वैज्ञानिकों और विद्वानों के समक्ष कुछ बोलने का साहस नहीं हो पा रहा था, किंतु भाषा के अनेक पक्षों पर काम करने की एक झक सी रही है; उसी को संतुष्ट करने के लिए विज्ञान की भाषा पर भी अपने विचार संगृहीत कर डाले हैं ताकि आप से कुछ परामर्श मिल सके। मैंने कुछ भाषायी विषयों जैसे 'इस काल की काव्यभाषा', 'उस काल की गद्यभाषा', 'अमुक कवि अथवा उपन्यासकार की भाषा', 'बच्चों की भाषा', 'स्त्रियों की भाषा', 'कानून की भाषा', हिन्दी भाषा की बोलियों और पत्रकारिता की भाषा पर थोड़ा बहुत लिखा है। मानविकी विषयों (कला, इतिहास, साहित्य, भूगोल, संस्कृति, धर्म, दर्शन आदि) का एक शब्दकोश भी संपादित किया है जो प्रकाशित है। राजभाषा का शब्दकोश भी दो भागों में प्रकाशमान है। सोचा कि इसी श्रृंखला में विज्ञान की भाषा पर भी कुछ लिख डाला जाए। अपने विचार दूसरे लोगों के सामने, विशेषतः आप जैसे सुधी विचारकों के सामने लाने से और उन पर टीका-टिप्पणी होने से मेरा और किन्हीं व्यक्तियों का लाभ अवश्य होगा। कम से कम विज्ञान के विद्यार्थी लाभार्थियों में होंगे ही। भाषा का विद्यार्थी तो मैं उम्र भर रहा हूँ परन्तु प्रस्तुत विषय पर कुछ कहने का अधिकार उसी को हो सकता है जो विज्ञान का भी अच्छा जानकार हो। कोई चौहत्तर-पचहत्तर वर्ष पूर्व मैंने हाई स्कूल परीक्षा (हमारे यहाँ मैट्रिक) के लिए गणित और विज्ञान (केवल रसायन और भौतिकी) ले रखा था और दोनों में अस्सी पचासी प्रतिशत अंक भी प्राप्त किये थे। किन्तु इंटर के लिए कालेज में विज्ञान शिक्षण की कोई व्यवस्था नहीं थी। दर्शन और इतिहास ले लिया और विज्ञान छूट गया। जो विज्ञान उस समय पढ़ा और प्रयोगशाला में देखा-किया वह काफी निम्न स्तर का था। आज हाई स्कूल की तद्विषयक पुस्तकें देखता हूँ तो लगता है कि हमने कुछ भी नहीं सीखा—बस बैरोमीटर, लैक्टोमीटर, थर्मामीटर, बुनसन सेल, पॉजिटिव और नैगिटिव करंट, मैगनिट, पोल, ग्रैविरेशन, दो चार गैसें और कुछ परिभाषाएँ जो रट ली गई थीं और परीक्षा में उगल दी गईं।

मेरी शिक्षा-परीक्षा का माध्यम पाँचवें दर्जे से ही अँग्रेजी रहा है। विज्ञान की शब्दावली को समझने में किसी प्रकार की कठिनाई नहीं होती थी। आज बड़ी भारी समस्या यह है कि सामान्य छात्र अच्छी तरह न हिन्दी जानता है, न अँग्रेजी। इंटर तक प्रायः 80-85 प्रतिशत छात्र हिन्दी माध्यम से विज्ञान पढ़ते हैं, और फिर बी० एस-सी०, एम० एस-सी० में अँग्रेजी के बिना गाड़ी आगे नहीं चल पाती।

* 24 जनवरी 1997 को श्री रामदास गौड़ स्मृति व्याख्यान के अन्तर्गत दिया गया भाषण

हिन्दी से अँग्रेजी का काँटा या स्विच बदलने में उसे बहुत दिक़्क़त होती है। इस समस्या का समाधान ढूँढ़ने की आवश्यकता है।

विज्ञान तो विशेष ज्ञान है, इसलिए उसकी भाषा भी विशिष्ट होती है; सामान्य भाषा बहुत हद तक काम नहीं देती। एक विज्ञानी किसी घटना को देखता है अथवा कोई पदार्थ पाता है, तो उसके बारे में विचार करता है— भाषा में ही वह उसका विश्लेषण संश्लेषण करके तत्त्व निकालता है, अन्य तत्त्वों से तुलना करता है और कुछ निष्कर्ष निकालता है। यह सब टिप्पणी रूप में अपनी भाषा में लिखता जाता है। इस प्रकार कोई सिद्धांत, कोई नियम निर्धारित करता है या प्रचलित सिद्धांतों से जोड़ मेल करके देखता है। वह उस ज्ञान का मंथन करता है। अपने सहयोगियों, अपने गुरुजनों और अपने छात्रों तक से विचार विनिमय करता है। वह साधारण भाषा में अपनी बात नहीं समझा पाता। तब वह सामान्य भाषा के शब्दों को नया अर्थ देकर अथवा अपनी शास्त्रीय भाषा (संस्कृत, ग्रीक या लैटिन) के शब्द में उपसर्ग प्रत्यय जोड़कर अथवा किसी भिन्न शब्द के साथ समास बनाकर, अथवा कोई बिल्कुल नया शब्द (जिसे प्रारंभ में वह स्वयं या उसके साथी ही जानते हैं) गढ़कर उसकी परिभाषा भी स्वयं व्याख्यापित कर देता है जिससे उस शब्द का प्रसार होने लगता है। पर नयी गढ़न बहुत कम होती है। धातु रूपों, उपसर्गों और प्रत्ययों अथवा समासों का आकलन-विकलन बहुत होता है। इस प्रक्रिया को थोड़े विस्तार से आगे बताऊँगा।

इस प्रकार वैज्ञानिक शब्दावली की चार कोटियाँ बनती हैं.—

1. सामान्य भाषा के शब्द जिनका वैज्ञानिक अर्थ और प्रयोग प्रायः अलग हो जाता है;
2. शास्त्रीय भाषा (संस्कृत, ग्रीक, लैटिन) के रूढ़ और व्युत्पन्न शब्द;
3. अन्य भाषाओं से उधार लिये गए शब्द; और
4. वैज्ञानिकों द्वारा गढ़े गये मनमाने और नितांत नये शब्द ।

सामान्य भाषा के शब्द

अँग्रेजी में life के और हिन्दी में जीवन के कई अर्थ हैं। आक्सफ़र्ड (1993) में लाइफ़ के 12 और मानक हिन्दी शब्दकोश में जीवन के 15 अर्थ दिये गए हैं। वैज्ञानीकों को तो एकार्थक लाइफ़ और जीवन चाहिए। अनेकार्थकता में भ्रांति उत्पन्न होने का डर रहता है। हो सकता है कि प्राणिविज्ञानी जिस एक अर्थ को स्वीकार करता हो, वनस्पति-शास्त्री दूसरे अर्थ को लेता हो, वनस्पति शास्त्री life और जीवन का अर्थ जान के अर्थ में ग्रहण करता है, जैसे पौधों में भी जीवन है, अर्थात् जान है; और प्राणिविज्ञानी life का अर्थ जीव लेता है, जैसे लाइफ़ फ़ार्म—जीवरूप, लाइफ़ ज़ोन जीव-कटिबंध। सं० 'राशि' शब्द बड़ा सरल है, जिसका अर्थ ढेर, पिण्ड, समूह, संख्या आदि है। केवल इसी अर्थ में इसका प्रयोग ऋग्वेद में भी मिलता है। आगे चलकर गणित ने इसको संख्या-प्रक्रिया अर्थात् जमा, व्यवकलन, गुणा और भाग के लिए और फिर ज्योतिष ने एक नया अर्थ दिया, zodiac sign अर्थात् ग्रहों की स्थिति मेष, वृष, मिथुन आदि। working के पारिभाषिक प्रयोग देखिए— working current

(भौतिकी में) प्रचालन धारा, working map (भूगर्भ विज्ञान में) आधार मानचित्र, working life (रसायन में) कार्यकार आयु, working class (समाजशास्त्र में) श्रमिक वर्ग, working cattle (भूगोल में) श्रमयोग्य पशु, working wife (गृहविज्ञान में) अर्जक पत्नी। सामान्य हिन्दी के किसी कोश में ये अर्थ नहीं मिलते। ये विज्ञानियों के दिये हुए अर्थ हैं।

'आधार' एक साधारण सा शब्द है। गणित में यह base के लिए, प्राणिविज्ञान में basis के लिए, रसायन और वनस्पति शास्त्र में stand, भूगर्भविज्ञान में substratum और भौतिकी में support के अर्थ में प्रयुक्त हुआ है।

संख्यावाची शब्दों अर्थात् एक, द्वि आदि को uni, mono, troi, deca को तद्वत् ग्रहण किया जाता है। भले ही वे ठेठ अँग्रेजी के हों अथवा ग्रीक और लैटिन के, ये सब एकार्थी हैं ही, इसलिए इनमें कोई उलझन नहीं होती ।

अनेकार्थकता के कारण विज्ञान आम तौर पर सामान्य भाषा के शब्दों को अनिश्चित और हीन समझता है। उदाहरणस्वरूप-—नमक नहीं, लवण; पानी नहीं जल; ह्वा नहीं, वायु या वात; पीठ नहीं पृष्ठ; अँगूठा नहीं, अंगूष्ठ; उँगली नहीं, अंगुलि वैज्ञानिक और पारिभाषिक शब्द हैं। अँग्रेजी शब्दावली में भी यही है— sleepless नहीं, insomnia; water कम, aqua या hydro : sound कम, phone ; back नहीं, dorsal; chest नहीं pectus में पारिभाषिकता है। ऐसा तो नहीं है कि साधारणतः प्रचलित शब्दावली का नितांत तिरस्कार कर दिया जाता है। परन्तु संस्कृत, ग्रीक, लैटिन के साथ एक तो शास्त्रीय सीमा या मर्यादा लगी है और दूसरे इनमें उत्पादकता और प्रसार है। पानी से बनने वाले हिन्दी के बड़े शब्दकोश शब्द सागर में 8-10 शब्द हैं अधिकतर समास। उपसर्ग नहीं लग सकता, प्रत्यययुक्त शब्द केवल तीन मिले— पनीला, पानीदार और पानीय। जल शब्द का विस्तार लगभग 200 शब्दों में हो गया और अभी और भी हो सकता है। इसी प्रकार water से व्युत्पन्न एक शब्द मिला और acqua और hydro से क्रमशः 66 और 186 ऐसे शब्द शब्दावली आयोग के छोटे से शब्दसंग्रह में प्राप्त हुए। वैज्ञानिक को ऐसा ही भाषाधार चाहिए जिसमें प्रसारशीलता हो।

शास्त्रीय भाषा के आधार पर रचित शब्द

यूरोप-अमेरिका के लिए ग्रीक और लैटिन एवं भारत के लिए संस्कृत शास्त्रीय भाषा है। इन भाषाओं में संधि, समास, उपसर्गों और प्रत्ययों द्वारा शब्दरचना करने की अद्‌भुत सामर्थ्य है और इनमें प्राचीन काल से वैज्ञानिक शब्दावली की परंपरा भी चली आ रही है जिसे आज के वैज्ञानिकों ने पा लिया और पूरा-पूरा लाभ उठाया है।

रचना की दृष्टि से शब्द दो प्रकार के हैं— रूढ़ और यौगिक। रूढ़ क्रिया धातुएँ (roots) संज्ञाधातुएँ (stems) और अन्य मूल शब्द होते हैं जिनके सार्थक खंड नहीं हो सकते। जैसे— हृ, चर्, धृ, पा, नश्, अंश, अंत, अग्र, अणु, एक, कंप, कोण, जल, पिंड, पूर्व, पश्च, भर, मुख, लघु, शंकु इत्यादि

ग्रीक—opt (to see), phon (to sound), bios (life), chrom (रंग), geo (भूमि), derma (चर्म), lithos (पत्थर), Phos (प्रकाश), tele (दूर), pyr (अग्नि).

लैटिन— altus (ऊँचा), bene (भला), copus (शरीर), dexter (दक्षिण), dormio (निद्रा), fero (उठाना), fugio (भागना), ligo (बाँधना), lux (प्रकाश), mitto (भेजना), pes or pedis (foot), seco (काटना), spiro (साँस लेना), video or visun (देखना), vivo (जीना).

दूसरे प्रकार के शब्द अर्थात् यौगिक शब्द वे हैं जो रूढ़ शब्दों के साथ अन्य रूप शब्द अथवा शब्द खंड जो उपसर्ग और प्रत्यय (prefixes and suffixes) कहे जाते हैं लगाकर व्युत्पन्न शब्द बनाये जाते हैं। यह प्रक्रिया निम्नलिखित रूपों में होती है—

1. रूढ़ अथवा यौगिक शब्द + रूढ़ अथवा यौगिक शब्द

जिन्हें हम संधि समास Compounds कहते हैं-— नलकूप, जलचर, तीव्रता मापनी, वेधशाला, पृष्ठांग, क्वथनांक, भागफल, मधुमेह, जीवद्रव्य, तलछट, अंकुश कृमि, त्रिविम, द्विरूप, प्रकाश मंडल, मुर्गाबी, विद्युद् धारिता, वातानुकूलन, रंध्रांक, लंबाग्र, शीतोष्ण, संपात गति, धारिता भार, अम्लमान, धातु शोधन। इनमें एकाधिक रूढ़ और यौगिक शब्द जुड़ते जाते हैं।

ग्रीक और लैटिन के उदाहरण — bibliography, decagon, hydrography, taxidermist, Kaleidoscopy, geology, mycoplasm, centimetre, load stone, nitrogen, oxysalt, cytophil, mycoplasm, vasodilation, aerodynamics, centrossicle, cormophyte, cytrometre, chromto arsenate, chloroform.

2. उपसर्ग + रूढ़ अथवा यौगिक शब्द

उपसर्गों का व्यवहार वैज्ञानिक शब्दावली के निर्माण में अपेक्षाकृत अधिक होता है। संख्या में ये बहुत थोड़े से है, परन्तु हैं बहुत महत्त्वपूर्ण। संस्कृत में अ, अग्र, अति, अधि, अधः, अन् अनु, अप, अभि, अव, आ, उत्, उप, कु, दुर् (दुस्) नि, निर् (निस्), पर, परि, पश्च, पुनर्, पूर्व, प्र, प्रति, प्राक्, सत्, सह, सु, एवं स्व ये 29 उल्लेखनीय है। ग्रीक और लैटिन के a (नहीं) alb (अप), acro (अग्र), aniso (असम), ante (पूर्व), anti (प्रति), ano (ऊर्ध्व), apo (भिन्न), bi (द्वि), by (उप), cata (अप, अधः) , centi (सौ), co (सह), com (सम्, सम्यक्), de (वि, निस्) deca (दश), dia (पार), dis (भिन्न), dys (दुर्), di (द्वि, पार), ecto (बाहर), endo (अंतः), onto (अंतः), epi आजग (उपरि, अधि), eu (सु), ex (पूर्व), fore (अग्रे), hecto (शत), hemi (अर्ध), hepta (सप्त), hetero (अन्य, भिन्न), hexa (षट्), holo (पूर्ण), homo (सम, समान), hyper (अधि, अति), hypo (अधः), infra (अधः), inter (अंतः), inra (अभ्यंतर), iso (सम, स-), juxta (सं), macro (दीर्घ), mal (दुर्, कु), mega (महान्), meso (मध्य), milli (सहस्र), mis (दुर्-दुस्), mono (एक), multi (अनेक), neo (नव), non (नहीं), ob (अभि), octa (अष्ट), omni (सर्व), pan (सर्व), para (अधि), penta (पांच), per (पूर्ण, अति), peri (परि, आसपास), poly (अनेक) post (पश्च), pre (पूर्व), pro (प्रति, अग्र), Pros (की ओर), proto (आद्य), pseudo (कूट), quadri (चार),

quinque (पाँच), re (पुनः) retro (पश्च) semi (अर्ध), sept (सप्त) sub (अधः), इसके suc, suf, sum, sup, sur, sus रूप अगले शब्द के अनुसार बन जाते हैं। ऐसा कई अन्य शब्दों में व्यंजन का मेल होता है— sym/syn सह, tele दूर, tetra (चार), trans (परे, पार), tri (त्रि), twi (द्वि) , ultra (परे, अति), un (नहीं), up (उत्, ऊर्ध्व), uni (एक), vice (उप)। इनके अर्थ साथ-साथ दे देये गए हैं, और उदाहरण आपके सामने आते रहे होंगे।

फिर भी विषय की पूर्णता के नाते और सामान्य विद्यार्थी या पाठक के लिए कुछ उदाहरण दे देना अभीष्ट है—

Ultrashort (अति लघु), Overcooling (अतिशीतन), supersaturated (अति संतृप्त), hyperbola (अति परवलय),supraconductivity(अति चालकता, hypocentrum(अधः कशेरूकमूल),underthrusting (अधःक्षेपण), substratum (अधः स्तर), inferomarginal (अधः सीमांत), epicranium (अधिकपाल), para-magnetic (अनुचुम्बकीय) resonance (अनुनाद), anticline (अप-नीत), exfoliation (अपपत्रण), anhydrons (निर्जल), inactive (निष्क्रिय), acrogenous (अग्रवर्धी), bilammar (द्विकलकी), catabolism (अपचय), centigrade, concurrent (संगामी) dehydration (निर्जलीकरण) degeneration (अपभ्रंशन), discordant (विसंगत), dimorphic (द्विरूपी), hemihedron (अर्धफलक), hexagonal (षट्कोणीय), peri-haemal (परिरुधर), precautio (पूर्वाधान), isoclinal (समनत), macronucleus (गुरुकेन्द्रक), micro structure (सूक्ष्म संरचना),projectile(प्रक्षेप्य),prosocoele(अग्रगुह),subpetaloid(उपदलाभ),subpolar(अधोध्रुवीय), telescope (दूरदर्शी) tetrandrous (चतुःपुंकेसरी), unipolar (एकध्रुवी)।

हजारों शब्द उपसर्गों के योग से बनते हैं। उदाहरणार्थ, वैज्ञानिक तथा तकनीकी आयोग के छोटे से और अपूर्ण शब्दसंग्रह में peri (परि) से बनने वाले शब्द 11 कालम में, anti (प्रति) से 13 कालम में, micro (लघु) से 15 कालम, hyper (अति) 17 कालम dis (अ, अव) 20 कालम, hypo (अधः) से 26 कालम, inter और intra (अंतः) 36 कालम, re (पुनः) 40 कालम भर गए हैं। अभी और बहुतेरे शब्द बन सकते हैं और बनते रहेंगे।

3. रूढ़ अथा यौगिक शब्द + प्रत्यय

प्रत्ययों की संख्या बहुत अधिक है, परन्तु विज्ञान में उन सब का व्यवहार नहीं होता। निम्नलिखित संस्कृत प्रत्ययों की बारंबारता कुछ अधिक है—

इक— (विशेषण) मौखिक, प्राविधिक, ध्वानिक, ध्वनिक, त्रैराशिक, दशमिक, निगमनिक।

इका— (लघुतावाचक) कणिका, गुच्छिका, कोशिका, अस्थिका, अंकुशिका, चक्रिका, वाहिका, खातिका।

इकी— (विज्ञान) भौतिकी, पारस्थितिकी, स्थैतिकी, गतिकी, सांख्यिकी, तापायनिकी, शैलिकी।

अक— (लघुतावाचक) पिंडक, पृष्ठक, लिंगक, नेत्रक, अणुक ।

आभ— (जैसा) कंकताभ, काचाभ, क्षाराभ, प्रवालाभ, नीलाभ, अंकुशाभ, मानवाभ।

अक—(विशेषण, कर्त्ता) पाचक, योजक, प्रभाजक, प्रवर्तक, प्रदीपक, विवरणक, निर्धारक, निर्वातक।

इत्र— (उपकरण) खनित्र, द्रावित्र, प्रक्षेपित्र, प्रतिकारित्र, संघनित्र।

अन— (क्रिया) ध्रुवण, आसवन, प्रदीपन, प्रतीपन, निषेचन, निस्यंदन, प्रकुंचन, प्रतिरोपण।

आत्मक— (विशेषण) विकिरणात्मक, दिशात्मक, प्रतीकात्मक, संख्यात्मक।

इत— (कृदन्त, तद्धित, विशेषण) प्रतिसममित, प्रवलित, परागित, बिंदुकित, संगलित।

ई— (विशेषण) द्विपर्णी, द्विपृष्ठी, प्ररूपी, प्रभावी, प्रभाजी, ध्वनिरोधी, जर्मनाशी, जननांगी।

ई— (साधन) नवनीत मापी, ध्रुवण मापी, सूक्ष्मदर्शी, दाबमापी, प्रस्फुरदर्शी।

ईय— (विशेषण) कक्षीय, अक्षीय, कोचनीय, दिगंशीय, प्रतिचुंबकीय, प्रपदकीय।

ता— (भाववाक संज्ञा) प्रवणता, धार्यता, अवशोषकता, प्रसामान्यता, बहुकता, बहुअंगुलिता, बिंदुकता।

ति— (भाववाचक संज्ञा) प्रयुक्ति, प्रकाशमिति, ज्यामिति, संपुष्टि।

भवन— (होना संज्ञा) अश्मीभवन, सपाटीभवन, संगुटीभवन।

करण— (कर्ता संज्ञा) आर्द्रीकरण, समीकरण, निर्जलीकरण, पृथक्करण, बहुलकीकरण, शुष्कीकरण।

कारक— (करने वाला) दृढ़ीकारक, श्लेषमाकारक, साबुनीकारक।

कारी— (विशेषण, करने वाला) निद्राकारी, क्षयकारी, क्षीणकारी, शून्यकारी।

मान— (होने वाला) प्रतीयमान, प्लवमान।

इसी तरह के प्रत्यय विदेशी शब्दों में भी लगाकर संकर या दोगले यौगिक बनाये गए हैं। केवल अ, आ से आरंभ होने वाले कुछ उदाहरण नीचे दिये जा रहे हैं —

आक्सीय, आदिमैग्मी Magmatic, आयनी ionic आरसेनिकीय arsenical, अमीबीय amaeboid, अमोनित ammonified, आइडीकरण oidization, ऑक्सीभवन oxydisation, वोल्टता voltage.

अँग्रेजी, ग्रीक और लैटिन में जिन प्रत्ययों का अपेक्षाकृत अधिक प्रयोग हुआ है, उन्हें नीचे दिया जा रहा है।

पहले विशेषण प्रत्यय

अँग्रेजी के सब विशेषणीय प्रत्ययों का व्यवहार तो होता ही है, परन्तु विज्ञान में जिनकी प्रचुरता पाई जाती है, उनको सोदाहरण दिया जा रहा है।

al—adhesional, axial, abdominal, alluvial, dimensional, branchial, chemical, orbital, thermal, frictional, neutral, technical, prismoidal.

ant, ent— discordant, radiant, dormant, discriminant, cumulant, invariant, intermittent, toxicant, lubricant, luminescent.

ar, ary— muscular, lunar, angular, intercalary, urinary, involuntary, integumentary, secondary, sedimentary.

ic—acoustic, dynamic, ionic, atomic, genetic, chromatic, chloric chronic, ferric, elliptic, harmonic, magnetic, nitric, carbolic.

oi आभ—ovoid, alkaloid, rhomboid, anthropoid.

ous— विशेषतः वनस्पति विज्ञान में; acarpous, acidulous, aspermous, petalous, harboreous crustaceous, cutaneous, ligneous, gaseous, extraneous, noxious, orgadophilous, papyraceous, perichylous.

संज्ञा-प्रत्ययों में ate, ation, er य or, gen, ide, ine य ene, ite और itis उल्लेखनीय हैं।

उदाहरण—

ate— nitrate, sulphate, hydrate, titrate, citrate, variate. ate विशेषण-प्रत्यय भी है और क्रिया-प्रत्यय भी।

ation— hydration, insolation, inoculation, innervation, geniculation, gemmation, fermentation, filteration, protodestilylation.

er या or —dropper, diffuser, analyser, ironizer reducer, connecter, incubator, extensor, adductor, nadiator, seductor.

gen— oxygen, hydrogen, nitrogen, cyanogen, acrogen, glycogen, thallogen.

ide— hydride, chloride, carbide, sulphide, cyanide, oxide.

ine, ene— nectarine, analine, nicotine, caffeine, glycerine, quinine, iodine, benzene, acetylene, nephthalene.

ite (विशेषतः भूविज्ञान में) — achroite, diaphthorite, graphite, ammonite, haematite, zeolite, balemnite, cyclonite, cryolite.

itis (विशेषतः आर्युविज्ञान में)— gastritis, bronchitis, nephritis, laryngitis, appendicitis, phlebitis, neuritis.

शब्द निर्माण में एक से अधिक उपसर्ग अथवा एक से अधिक प्रत्यय साथ-साथ पाये जाते हैं। उदाहरण—अनु प्र युक्त ; अति सं शोधित; अधि वि भव; अ परि पक्व; अभि वि न्यास; उप अप चय; वि उत् क्रम; सम अनु पात; परि उप अस्थि ; जल ईय ता ; कील क इत; प्राय इक ता; रूप + अंतर् + अन = रूपांतरण।

ne ad just; peri endo soma ; poly meta morphous ; bi pro pellant; dis con firmity; dis in fect.

harmony + ic + al +ly = harmonically, ion gen ic = ionogenic.

इस विश्लेषण का लाभ

अब तक के विश्लेषण का तात्पर्य यह है कि वैज्ञानिक शब्दों के अध्ययन और उनके अर्थग्रहण में यह एक महत्तवपूर्ण पद्धति है। धातु रूप या प्रतिपादिक और उपसर्ग तथा प्रत्ययों का ज्ञान अपेक्षित है, और यह कोई कठिन कार्य नहीं है। मान लो आप का विषय रसायन है। इसके लिए ग्रीक और लैटिन के कोई पाँच सौ धातुओं, तीस-चालीस उपसर्गों और कुछ अधिक प्रत्ययों की सूची मिलती है। इस तरह विज्ञान की प्रत्येक शाखा की क्रियाधातुएँ और संज्ञाधातुएँ उपलब्ध हैं। आपका सारा शाब्दिक ज्ञान उन्हीं में समाया हुआ है। कुछ सरल आर कुछ कठिन शब्दों का रूप और अर्थ विश्लेषण इस आधार पर करके देखें—

bronchitis— bronch श्वसनी + itis शोथ = श्वसनी शोथ

bronchadenitis —fronch श्वसनी + adena ग्रंथि + itis शोथ = श्वसनी ग्रंथि शोथ

castoplasty— casto पर्शुका + plasty जोड़ या संघान = पर्शुकासंधान

castosternoplasty— casto पर्शुका, stearno उरोस्थि + plasty = पर्शुका उरोस्थि संघान

epidermoid—epi अधि, derm चर्म + oid आभ = अधिचर्माभ

celiocolpotomy—celio पेट, colpo योनि + tomy छेदन = उदर का योनि से छेदन

Katametamorphism— kata निम्न, meta अंतर, morph रूप+ ism अन = निम्नरूपान्तरण।

Kinoplasmosome— kino गति, plasma जीवद्रव्य + some योग = जीवद्रव्य का गतियोग (शब्दसंग्रह में यह शब्द तत्सम रूप में लिया गया है।)

haemangiopericytoma- इसका अर्थ भी शब्दसंग्रह में नहीं दिया गया। देखें haem रक्त, angio वाहिका, peri परि या आस-पास, cyto कोशिका, oma अर्बुद = रक्तवाहिका के आसपास बना कोशिकार्बद।

हम संधि-समास, उपसर्ग और प्रत्यय की सहायता से कठिन से कठिन शब्दों के अर्थ निकाल सकते हैं। यही नहीं, क्रियाधातुओं और संज्ञाधातुओं के इन शब्दखंडों के जोड़-तोड़ से नये शब्द बना भी सकते हैं। विज्ञानी ऐसा ही करते हैं।

प्रसंगवश विज्ञान के विद्यार्थियों की भाषा-शिक्षा पर विचार करता हूँ। पहले ऐच्छिक विषय के रूप में अँग्रेजी के कुछ निश्चित पीरियड होते थे। पाठ्यक्रम क्या था, मैं नहीं जानता। यह भी मुझे ज्ञात नहीं है कि अब क्या स्थिति है। किंतु मेरा प्रस्ताव है कि यदि उनका कोर्स शब्दभंडार और शब्दों के प्रयोग (व्याकरण) दोनों भाषाओं का साथ-साथ सिखाया जाये और शब्द भंडार के अंतर्गत शब्द रचना पर बल दिया जाये तो उनका और उनके साथ उनके विषय का कल्याण होगा। उनकी भाषा

प्रयोजनमूलक होनी चाहिए। बहुत से विश्वविद्यालयों में प्रयोजनमूलक भाषा के पाठ्य-क्रम चल रहे हैं—रसायन, भौतिकी, जीवविज्ञान आदि के अलग-अलग।

उधार के विदेशी शब्द

अँग्रेजी माध्यम से यूरोपीय भाषाओं के जो शब्द तत्सम रूप में लिये गए हैं वे दो प्रकार के हैं— एक वे जो स्वतंत्रता प्राप्ति की नवजाग्रति से पहले प्रचलित हो गए थे— ऑक्सीजन, हाइड्रोजन, नाइट्रोजन, गैस, एसिड, मीटर, कैलसियम, सोडा, विटामिन, अल्कलाइ, ग्लूकोस, कैलोरी, कैफ़ीन, ब्रोमाइड, क्लोरीन, ग्लिसरीन, कान्क्रीट, सेलुलाइड, सेन्टीग्रेड, सेन्टीमीटर, ग्राम, कार्बन, चाक, बीकर, लिटमस, क्लिप, सेल, बैटरी, प्रोटीन, बैंड, फिल्टर आदि। ये सब चल रहे हैं।

लेकिन जब से हिन्दी या भारतीय भाषा के माध्यम की चर्चा चली है तब से हज़ारों शब्द लेने पड़े हैं जिनका अनुवाद नहीं हो सका, चाहे संस्कृत के अज्ञान के कारण अथवा किन्ही शब्दों की विकट प्रकृति के कारण। प्रतिचयन (sampling) करके मैंने पाया कि ऐसे शब्द कुल का 42% हैं। इनमें कुछ संकर शब्द भी है- जैसे अंतरागैलक्सीय, कैलसाइटधारी, एसिडीभवन, क्लैडोडीकरण, कास्टीकृत, क्रिस्टलीय, वोल्टता, एसिडता, हाइड्रोजनित, पवनकैल्सीरेणुकाभ।

कितने गंदे शब्द है ये ! आयोग के शब्द संग्रह में इनकी कुल संख्या 25 हज़ार से कम नहीं है।

व्यक्तिवाचक शब्द

व्यक्तिवाचक संज्ञाओं का अनुवाद भी नहीं होता। कुछ वैज्ञानिकों के नाम से कोई न कोई संप्रत्यय (concept) निश्चित हो गया है, जैसे भौतिक विज्ञान में—

ampere (A. M. Ampere, 1775-1830)

conlomb (C.A. Conlomb , 1736-1806)

farad (M. Faraday, 1791-1867)

gaus (K. F. Gaus, 1777-1855)

henry (J. Henry, 1799-1878)

oersted (H. S. Oersted, 1777-1851)

ohm (G. S. Ohm, 1789-1854)

volt (A. Volte, 1745-1827)

watt (J. Watt, 1736-1819)

ये सब शब्द बिजली या चुंबक के किन्हीं पक्षों की इकाइयाँ हैं।

कुछ व्यक्तिवाचक संज्ञाओं के साथ खोजकर्ता का नाम जुड़ा है: जैसे—

ऐबे का अपवर्तन मापी
आबेल की परीक्षण विधि
अब्राहम का गाढ़तामापी
बोस चौधरी के कूटनियम
बोस कण
रामन विकिरण
रैले जीन्स का सूत्र
रैकिन का चक्र
ऐबट काक्स का प्रक्रम
आबेल प्रमेय (theorem)
एडीसन रोग
बोस-आइन्स्टाइन गैस
रामन विस्थापन
तैमान सिद्धांत
राज़ेक मल्डर का विश्लेषित
रैमण्ड मिल

रासायनिक मूल तत्त्व और प्रतीकाक्षर

मेरे पास 106 रासायनिक मूलतत्त्वों (elements) की एक सूची है, जिन में सोना-चाँदी, तांबा, जस्ता, पीतल, लोहा, पारा, गंधक जैसे 10-12 शब्द तो हिन्दी में उपलब्ध है, परन्तु इनके और शेष सबके प्रतीकापक्षर जैसे carbon, ca calcium, F fluerine, He Helium आदि का प्रयोग तद्वत् होता है। इनका भी हिन्दीकरण नहीं होता।

बीजगणितीय भाषा

अब एक और भाषा व्याप्त हो रही है जो किसी शब्द या पूरे वाक्यांश को एक अक्षर या एक अंक के द्वारा कह देती है। हमारे ज़माने में यह भाषा बीजगणित में x y z , a b c के सूत्रों में ढली मिलती थी। H_2O भी हम समझते थे, अब सब विज्ञानों में इसका प्रसार हो गया है— भौतिकी में सब से अधिक, और शेष विज्ञानों में कुछ कम, परन्तु सर्वत्र छा रही है PtO_2, C_2, NH, क्या है ? लिखें प्रोफ़ेसर श, पढ़ाये डॉ० प और समझें बेचारे विद्यार्थी। इन सूत्रों का हिन्दीकरण नहीं होता।

चिन्ता का विषय

सोचता हूँ कि विज्ञान में हिन्दी भाषा का क्या स्थान है? पिछले विश्लेषण से यही सिद्ध होता है कि हिन्दी का श्ब्दभंडार उतना ही है जितना हमें प्राचीन युग के मनीषियों और वैज्ञानिकों ने दिया था। शायद उसकी भी पूरी खोज नहीं हो पाई। हिन्दी में वैज्ञानिक अनुसंधान का माध्यम नहीं बन पाई, इसलिए कोई नयी शब्दावली विकसित नहीं हुई। भारत सरकार ने जिस शब्दावली आयोग की स्थापना की थी, उसका शब्दसंग्रह 1973 में प्रकाशित हुआ था। तब से उसके पूरक रूप में कोई शब्दावली हमारे सामने नहीं आई। वह शब्दसंग्रह भी आधा-अधूरा है, और अधिक से अधिक स्नातक कक्षाओं के स्तर का है। जो पाठ्य पुस्तकें हिन्दी में उपलब्ध है वे भी उच्चतर कक्षाओं के स्तर की नहीं हैं। विद्यार्थी और शिक्षक-प्रायः अनुभव करते रहते हैं कि विश्वविद्यालयीय शिक्षा के लिए अँग्रेजी

अनिवार्य है। मैं रेडियो पर ज्ञान-विज्ञान कार्यक्रम का प्रसारण सुनता रहता हूँ। उसमें एक चौथाई हिन्दी और तीन चौथाई अँग्रेजी होती है, यद्यपि यह प्रसारण साधारण हिन्दी श्रोता के लिए होता है, विज्ञान के विशेषज्ञ के लिए नहीं। विज्ञान परिषद् को इस समस्या पर विचार करना चाहिए। कई बार सोचता हूँ कि हिन्दी माध्यम से पढ़ाई करने वाले विद्यार्थियों के साथ धोखा तो नहीं हो रहा। हिन्दी के भविष्य और अँग्रेज़ी की अनिवार्यता पर गंभीरता से विचार-विमर्श होना चाहिए।

बिगड़े या मनमाने शब्द

यह बात सही है कि सभी शब्दों का स्रोत या उनकी व्युत्पत्ति जान लेना संभव नहीं होता और कई बार संभाव्य व्युत्पत्ति मिथ्या सिद्ध होती है। उदाहरण स्वरूप rectum का अर्थ है मलाशय । परन्तु rectum का मूल अर्थ है सीधा, तो यह क्या हुआ? पूरा शब्द तो था intestinus rectum सीधी आंत, जो सीधी आती है मलाशय तक। intestinus कट गया और rectum पूरे अंग के अर्थ में बचा रह गया।

Barometre तो है भारमापक पर प्रचलित अर्थ हो गया वायुदाबमापी।

Artery = air tereo हवा की नली। पहले शायद यह जाना गया कि इस नाड़ी से हवा का संचार होता है; बाद में ज्ञान हुआ कि इससे रक्त का संचार होता है । पर शब्द बना रहा, अर्थ बदल गया।

Paraffin बना है, par + affinity, जिससे उस द्रव का बोध नहीं होता।

Hysteria का व्युत्पत्तिमूलक अर्थ तो है गर्भ का रोग, परन्तु यह गर्भ का रोग, तो नहीं है।

Apron क्या है? शब्द तो था A napron, n a के साथ चला गया और an apron ही अर्थवान हो गया।

Quartz का अर्थ है एक-चौथाई। पता नहीं स्फटिक के लिए कैसे प्रयुक्त होने लग गया।

Pollen का मूल अर्थ तो है महीन चूर्ण या आटा, किंतु पराग तो महीन नहीं होता।

Oxygen = Oxy खटाई, gen पैदा करने वाला gen

मुख्य-मुख्य विज्ञानों की शब्दावली

रसायनविज्ञान की भाषा मुझ जैसे अविज्ञानी को सबसे अधिक सुबोध जान पड़ती है। कुछ धातुओं के नाम हम जानते ही है, जैसे सोना, चाँदी, रूपा, ताँवा, पीतल, जस्ता, लोहा, फौलाद, कलई, पारा और निकल; और कुछ के नाम सुने हैं; जैसे आर्सेनिक, बिस्मथ, मैंगनीज़, कोबाल्ट। कुछ चीजें दवा में प्रयुक्त होती रहती है जैसे फिटकरी, टाटरी और नीला थोथा। गैसों से प्रायः लोगों का परिचय भी है। सोडा कपड़े धोने का और खाने का, कुछ अम्ल भी देखे-सुने हैं। काफूर, इंडिगो, शुगर, सल्फर, संस्कृत से लिये गए शब्द हैं। शब्दावली में एक पद्धति है, सिस्टम है। उपसर्गों और प्रत्ययों का प्रयोग स्पष्ट है। अर्थ बहुत स्पष्ट हैं। उपसर्गों और प्रत्ययों का प्रयोग स्पष्ट है। तत्त्वों या um या

ium से पहचान हो जाती है, जैसे berium, chromium, potassium, beryllium, lithium, molydernum, sodium, titanium, strotum, zincum. इस प्रकार ene या ine, ide, ol, ose आदि प्रत्ययों के अर्थ बहुत स्पष्ट हैं। उदाहरण पीछे दिये जा चुके हैं।

सिस्टम तो वनस्पति शास्त्र में भी है। पेड़ पौधों और बेल-बूटों के नाम genus और species जिस ओर प्रजाति के नाम से समास बनते हैं, पर वे लैटिन में होते हैं और समझने एवं याद करने में कठिन हैं। यह पद्धति हम हिन्दी में नहीं अपना सके। प्राणिविज्ञान की शब्दावली मुझे सबसे दुरूह जान पड़ी। जीव-जन्तुओं की संख्या, उनके अंगों, स्वभाव, प्रकार्य आदि से सम्बन्धित शब्दावली बहुत अधिक है।

भौतिकी से संबंधित शब्द अनेक आविष्कारों के कारण प्रचारित हैं। सुई से लेकर बड़ी से बड़ी मशीन भौतिकी और औद्योगिकी की देन है। आम आदमी का काम विद्युत, प्रकाश, चुम्बक, ध्वनि आदि से पड़ता ही है। ग्रामोफोन, ट्रांसिस्टर, रेडियो, टेपरिकार्डर, टेलीफोन, टेलीग्राम, थर्मामीटर, पानी का मीटर, दूध परखने का मीटर, एक्स-रे, एटमबम, राकेट ये सब नाम सर्वविदित हैं। भौतिकी का एक विषय है ध्वनिकी। भाषाविज्ञान का विद्यार्थी इससे परिचित हैं। इस नाते भौतिकी ने भाषाविज्ञान को Kymograph, palatograph, seismograph आदि यंत्र दे रखे हैं। फिर भी भौतिक विज्ञान की शब्दावली रसायन की अपेक्षा अधिक कठिन है।

यह स्थिति विज्ञान को लोक में प्रचारित करने के प्रसंग में है।

सामान्य निष्कर्ष

1. विज्ञान की भाषा मूर्त होती है; साहित्य या दर्शन की भाषा की तरह अमूर्त नहीं। इसमें कल्पना जगत् नहीं है।

2. यह भाषा निश्चित और एकार्थी होती है, कोई भ्रांति नहीं होती। इसलिए अनुवाद आसान और सही होता है।

3. इसमें स्थिरता अधिक होती है। वैज्ञानिक शब्द कम ही बदलते हैं। अपवाद-स्वरूप जो थोड़े-से हैं; उनके उदाहरण पीछे दे दिये गये हैं। स्थायित्व का कारण यह है कि विज्ञानी अपने प्रयोग की प्रक्रिया को लिखता रहता है। लिखित और मुद्रित भाषा में परिवर्तन कम होता है।

4. विज्ञानी को शब्दनिर्माण और अर्थनिर्धारण में स्वतंत्रता होती हैं। कोई वर्जनाएँ नहीं हैं। वनस्पति- शास्त्र, प्राणिविज्ञान और आयुर्विज्ञान में ऐसे-ऐसे शब्द भरे पड़े हैं कि यदि उन्हें शास्त्रीय भाषा से उल्था करके सामान्य भाषा में बोला जाए तो घोर अश्लीलता मानी जाएगी।

5. व्याकरण के नियमों का प्रतिबंध भी नहीं है। शुद्धाशुद्ध का कोई विचार नहीं है। शुद्ध बन गया तो ठीक, नहीं तो काम चल जाता है।

6. सामान्य भाषा में अभिव्यक्ति के विकल्प हैं। आप एक बात को कई ढंग से कह सकते हैं। जैसे मैं प्रायः दोपहर के बाद भोजन करता हूँ, मैं अक्सर तीसरे पहर खाना खाता हूँ, मैं आमतौर पर 12 बजे के पश्चात् खाना खाता हूँ। विज्ञानी की भाषा एकरूप एकरस होती है। उदाहरण-स्वरूप किसी स्तर की (जैसे हाई स्कूल या इंटर स्तर की) रसायन की कोई पुस्तक उठाकर पढ़िए- एक सी भाषा, एक से वाक्य, नियम, परिभाषाएँ। किन्तु किसी कथा वस्तु (सैसे दहेज या दौलत-उद्धार) पर लिखी गई दस कहानियाँ पढ़ जाइए। दसों की भाषा और शैली अलग-अलग होगी।

7. प्रायः शब्दों का उच्चारण अनिश्चित है मैंने ग्रीक लैटिन के कई शब्द आपके सामने पढ़े, आपमें से कुछ समझते होंगे कि ठीक उच्चारण किया, कुछ कहते होंगे गलत। कई वैज्ञानिक कोश उच्चारण देते ही नहीं। जो देते हैं उनमें मतभेद है।

8. भाषा विचारों और भावों की अभिव्यक्ति का माध्यम होती है। साहित्यिक भाषा भावप्रधान होती है तो विज्ञान की भाषा विचारप्रधान, और क्योंकि विचार क्लिष्ट होते हैं, इसलिए भाषा भी क्लिष्ट रूखी सूखी, न रस न अलंकार। भ्रष्ट गद्य के उदाहरण दरकार हों तो विज्ञान की कोई पुस्तक पढ़ लें। कुछ नमूने हाज़िर हैं—

मनुष्य क्या है? इसे किसी ने साधारण भाषा में यों परिभाषित किया है :

मानव ईश्वर की सर्वश्रेष्ठ रचना है— बुद्धि में, तर्क में, वाणी में। अपने कर्मों के कारण वह देवता है, दैत्य भी।

और विज्ञान की भाषा में। man is a metazoan, triploblastic, vertebrate, mammalian primate हिन्दी में—मनुष्य एक त्रिकोरकी, कशेरूकी, स्तनपायी नरवानर जंतु है।

एक परिभाषा लें—The number of reacting molecules whose concentration alters as a result of chemical change is known as order of reaction.

मेरी समझ में यह अँग्रेजी वाक्य थोड़ा-थोड़ा आता है पर इसका हिन्दी अनुवाद सुनिए—अभिकारक अणुओं की वह संख्या, जिनका रासायनिक परिवर्तन के परिणाम से सान्द्रण परिवर्तित होता है, अभिक्रिया की कोटि कहलाती है।

है ना भ्रष्ट व्याकरण, दुरूह भाषा।

वनस्पतिविज्ञान में spindle तर्कु क्या है? सुनिए। कोशिका विभाजन में केन्द्रकीय झिल्ली के लुप्त होने के साथ-साथ उद्भूत होने वाला अरंज्य रेशो का झिल्ली की आकृति का विन्यास। इसमें रेशे एक ध्रुव तक अथवा ध्रुव से गुणसूत्र (कोमोसोम) तक विन्यस्त रहते हैं।

भौतिकी का एक पारिभाषिक शब्द है heterodyme। इसकी परिभाषा सुनिए— रेडियो अभिग्राही में दिष्टकारी जैसी किसी मौखिक प्रतिबाधा वाली युक्ति में अभिगृहीत तरंग के साथ इससे कुछ तरंगाकृति वाली स्थानीय रूप से उत्पन्न की गई तरंग को मिलाने का प्रक्रम है विशेष ज्ञान की विशेष्ष भाषा पढ़कर और एक आध बार फिर पढ़कर चिन्तन-मनन करने की चीज़ है, सुनने-सुनाने की नहीं और इसे पढ़ने का अधिकार भी विशिष्ट व्यक्तियों को है। भाषा तो विषय की अभिव्यक्ति के लिए हो ती है। पर विज्ञान की भाषा विषय को गोपनीय बना देती है। इस प्रकार विज्ञान विज्ञानी के ही दिमाग तक पहुँच कर रह जाता है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No.1, January, 1997.

संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी का $(C,1)$ रूपान्तर तथा $(H,1)(C,1)$ संकलनीयता

नीरजा सचान तथा वाई० बी० शुक्ला

गणित विभाग, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवॉं - 486001 (म० प्र०)

[प्राप्त-सितम्बर 6, 1996]

सारांश

प्रस्तुत शोध-पत्र में लेखक-द्वय ने संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी का (C, 1) रूपान्तर, प्रथम बार प्राप्त कर पर्याप्त शिथिल प्रतिबन्धों के अधीन इस श्रेणी की (H, 1) (C,1) संकलीनयता पर दो महत्वपूर्ण प्रमेय स्थापित किए हैं।

Abstract

The (C, 1) transform and (H, 1) (C, 1) summability of a conjugate derived Fourier series. *By* Neeraja Sachan and Y. B. Shukla, Department of Mathematics, Government Model Science College, Rewa- 486001 (M. P.)

In this research paper the authors have obtaied the (C, 1) transform of conjugate derived Fourier series for the first time and have established a pair of important theorems on the (*H*, 1) (*C*, 1) summability of this series under sufficiently relaxed conditions.

1. परिभाषायें तथा संकेतन

अनन्त श्रेणी $\sum^{\infty} u_n$ के आंशिक योग S_n का $(H, 1)(C, 1)$ रूपांतर इसी श्रेणी के $(C, 1)$ रूपान्तर σ_n के हरात्मक अथवा $(H, 1)$ रूपांतर के रूप में परिभाषित किया जाता है। अतः यदि

$$(H\,C)_n^1 \equiv \frac{1}{\log n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_{n-k}}{k+1} \to S, \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty \qquad (1.1)$$

जहाँ σ_n आंशिक योग S_n का (C, 1) रूपान्तर निरूपित करता है, तब श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ निश्चित संख्या S के लिये संकलनीय $(H, 1)\,(C, 1)$ कहलाती है।

मान लिया कि अंतराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय (L) तथा आवर्त $2\,\pi$ सहित आवर्ती फलन $f(x)$ की फोरियर श्रेणी यह है :-

$$\frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\, a_n \cos n\,x + b_n \sin\, n\,x\,) \equiv \sum_0^{\infty} A_n\,(x) \qquad (1.2)$$

तब फोरियर श्रेणी (1.2) की व्युत्पन्न श्रेणी जो $f\,(x)$ की व्यु त्पन्न फो रियर श्रे णी कहलाती है इस प्रकार प्रकट की जाती है :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(b_n \cos n\,x - a_n \sin\, n\,x\,) \equiv \sum_1^{\infty} n\,B_n\,(x) \qquad (1.3)$$

व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी (1.3) की संयुग्मी श्रेणी, जिसे $f(x)$ की संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी कहते हैं, यह होती है :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(a_n \cos n\,x + b_n \sin\, n\,x\,) \equiv \sum_1^{\infty} n\,A_n\,(x) \qquad (1.4)$$

स्थिर x तथा S के लिए हम इन संकेतनों का प्रयोग करेंगे :

$$g\,(t) = \frac{f(x+t) - f\,(x-t)}{4\sin\, t/2}$$

$$\Phi_0\,(t) = f(x+t) + f\,(x-t)$$

$$h\,(t) = \frac{\Phi_0\,(t)}{4\sin t/2}$$

2. प्रस्तावना

फोरियर श्रेणी की हरात्मक संकलनीयता से सम्बद्ध सिद्दीकी[1] और हिल्ले तथा तमारकिन[2] के दो परिणामों को व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी की $(H, 1)\,(C, 1)$ संकलनीयता तक प्रसारित करते हुए सक्सेना[3]

ने हाल ही में निम्नलिखित दो प्रमेय स्थापित किए हैं :

प्रमेय A : यदि

$$G(t) \equiv \int_0^t |g(u)|\, du = 0\left\{\frac{t}{\log 1/t}\right\}, \text{ज्यो-ज्यों } t \to 0, \tag{2.1}$$

तब $\sum_1^\infty n B_n(x) = 0((H,1)(C,1)).$

प्रमेय B : यदि

$$G(t) \equiv \int_0^t |g(u)|\, du = 0(t), \text{ज्यो-ज्यों } t \to 0, \tag{2.2}$$

तथा

$$\int_{\pi/n}^{\eta} \frac{\left|g(t) - g\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right|}{t} \log(1/t)\, dt = 0(\log n) \tag{2.3}$$

ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, जहाँ η एक धनात्मक अचर है, तब

$$\sum_1^\infty n B_n(x) = 0((H,1)(C,1)).$$

प्रमेय A तथा B की उपपत्ति में लेखिका ने सचान[4] द्वारा निम्नलिखित रूप में प्रदत्त, संयुग्मी फोरियर श्रेणी के आंशिक योग S_n के $(C,1)$ रूपान्तर σ_n का सम्प्रयो ग किया है :

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t)\left[\frac{2(1-\cos nt)}{nt^2} + \frac{\sin nt}{nt} - \frac{\sin nt}{t}\right] dt + 0(1), \tag{2.4}$$

जहाँ δ एक धनात्मक तथा π से छोटा अचर है।

यहाँ हमारा पहला उद्देश्य $f(x)$ की संयुग्मी व्युपन्न फोरियर श्रेणी के आंशिक योग S_n के (C,1) रूपान्तर $\sigma(n,t)$ को निम्नलिखित रूप में प्रथम बार प्राप्त करना है :-

$$\sigma(n,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h(t)\left[\frac{2\sin nt}{nt^2} - \frac{(1-\cos nt)}{nt} - \frac{\cos nt}{t}\right] dt + 0(1)$$

(2.5)

हमारा दूसरा उद्देश्य (2.5) की सहायता से प्रमेय A तथा B के परिणामों को $f(x)$ की संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी तक यह सिद्ध करते हुए प्रसारित करना है कि-

प्रमेय 1. यदि

$$H(t) \equiv \int_0^t |h(u)|\, du = 0\left\{\frac{t}{\log 1/t}\right\}, \text{ज्यों ज्यों } t \to 0, \tag{2.6}$$

तब संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी (1.4) निम्नलिखित समाकल के मूल्य के लिए संकलनीय(H,1) (C, 1) होती है :-

$$\lim_{n \to \infty}\left(-\frac{1}{4\pi}\right) \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\Phi_0(t)}{\sin^2 t/2}\, dt,$$

जबकि काशी की धारणानुसार समाकल का अस्तित्व दिया है।

प्रमेय 2. यदि

$$H(t) \equiv \int_0^t |h(t)|\, dt = 0(t), \text{ज्यों-ज्यों } t \to 0, \tag{2.7}$$

तथा

$$\int_{\pi/\eta}^{\eta} \frac{\left|h(t) - h\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right|}{t} \log(1/t)\, dt = 0(\log n)$$

ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, जहाँ η एक धनात्मक अचर है, तब संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी (1.4) नीचे लिखे समाकल के मूल्य के लिए संकलनीय $(H, 1)$ $(C, 1)$ होती है -

$$\lim_{n \to \infty}\left(-\frac{1}{4\pi}\right) \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\Phi_0(t)}{\sin^2 t/2}\, dt,$$

जबकि काशी की धारणानुसार समाकल का अस्तित्व दिया है।

3. आकलन

अपने प्रमेय सिद्ध करने के लिए हमें निम्नांकित आकलनों की आवश्यकता होगी

$$V(n,t) \equiv \left[\frac{2\sin nt}{nt^2} - \frac{(1-\cos nt)}{nt} - \frac{(1+\cos nt)}{t}\right] \tag{3.1}$$

$$= 0(n), \quad 0 < t < \frac{\pi}{n} \text{ के लिए}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} = 0(1), n \text{ तथा } t \text{ के सभी मूल्यों के लिए} \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kt}{k} = 0(\log 1/t), \quad \frac{\pi}{n} \leq t \leq \pi \text{ के लिए} \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kt}{(n-k+1)} = 0(\log 1/t), \quad \frac{\pi}{n} \leq t \leq \pi \text{ के लिए} \tag{3.4}$$

आकलन **(3.1)** का सत्यापन सरलतापूर्वक किया जा सकता है। आकलन **(3.2)** तथा **(3.3)** क्रमशः टिशमार्श[5] और हार्डी तथा रोगोसिंस्की[6] में दिए हैं, जबकि आकलन **(3.4)** को **(3.2)** तथा **(3.3)** की मदद से प्राप्त किया जा सकता है।

4. (C, 1) रूपान्तर $\sigma(n,t)$

संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी $\sum_{\infty}^{1} n A_n(x)$ का आंशिक योग S_n इस प्रकार प्राप्त होता है:

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} m A_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{f(x+t) + f(x-t)\}$$

$$\left\{\sum_{m=1}^{n} m \cos mt\right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi_0(t) \frac{d}{dt}\left\{\sum_{m=1}^{n} \sin mt\right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi_0(t)\left(-\frac{1}{4\sin\frac{t}{2}}\right) dt + \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi_0\,(t)\,\frac{d}{dt}\left\{-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right\}\,dt \tag{4.1}$$

आंशिक या S_n के $(C, 1)$ रूपान्तर को $\sigma\,(n\,,\,t)$ द्वारा निरूपित करते हुए तथा $h\,(t) \equiv \Phi_0\,(t)/(4\sin t/2)$ को $(0\,,\pi)$ में समकलनीय (4) मानते हुए हम (4.1), परिभाषा तथा $(C, 1)$ संकलन की नियमितता से पाते हैं :

$$\sigma\,(n\,,t) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Phi_0\,(t)}{\sin^2 t/2}\,dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\Phi_0\,(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left\{-\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\,\sin t/2}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\Phi_0(t)\,\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{-\sin\,(k+1)\,t + \sin k\,t}{4\,\sin^2 t/2}\right\}\,dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\Phi_0\,(t)\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin t - \sin\,(n+1)\,t}{4\,\sin^2 t/2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Phi_0\,(t)}{4\sin t/2}\left[-\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{(n+1)\cos\,(n+1)\,t}{\sin^2 t/2}+\frac{\cos\frac{t}{2}\,\sin\,(n+1)\,t}{\sin^2 t/2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{n\,\pi}\int_0^{\pi} h\,(t)\left[-\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t}{\sin t/2}-\frac{n\cos\,(n+1)\,t}{\sin t/2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} h(t)\left[-\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} + \frac{\sin nt}{\sin\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}} + \frac{\cos nt}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} h(t)\left[-\frac{n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\tan t/2} - (n-2n)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} h(t)\left[-\frac{(1-\cos nt)}{\sin t/2} + \frac{\sin nt}{\sin\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}} - \frac{n\cos nt}{\sin t/2}\right]dt$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} h(t)\left[\frac{\sin nt}{\sin\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}} - \frac{(1-\cos nt)}{\sin t/2} - \frac{n\cos nt}{\sin t/2}\right]dt$$

$$+ 0(1)\text{, ज्यों-ज्यों } n \to \infty,$$

रीमां लेबेग प्रमेय के सम्प्रयोग से।

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)\left[\frac{2\sin nt}{nt^2} - \frac{(1-\cos nt)}{nt} - \frac{\cos nt}{t}\right]dt + 0(1) \tag{4.2}$$

जहाँ $h(t)\left\{\frac{1}{\sin\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}} - \frac{4}{t^2}\right\}$ तथा $h(t)\left\{\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right\}$

के समाकलनीय होने के कारण अन्तिम साकल के प्रथम तथा तृतीय पद रीमा लेबेग प्रमेय से प्राप्त हुए हैं और मध्य पद इस कारण कि

$$\left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t}\right) = 0(t) \text{तथा}$$

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{h(t)}{n} \ (1 - \cos n t) \left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t} \right) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_0^{\pi} |h(t)| \, |1 - \cos n t| \, 0(t) \, dt$$

$$= 0 \left(\frac{2}{n} \right) \int_0^{\pi} |h(t)| t \ dt$$

$$= 0(1), \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty,$$

समाकल $\int |h(t)| \, dt$ के सातत्यांश से।

इस प्रकार रूपान्तर प्रस्तावित रूप में प्राप्त हुआ।

5. प्रमेय 1 की उपपत्ति

संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी **(1.4)** आंशिक योग S_n का $(C, 1)$ रूपान्तर **(4.2)** के सम्प्रयोग से इस प्रकार प्रकट किया जाता है :-

$$\sigma(n, t) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Phi_0(t)}{\sin^2 t/2} \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(t) \left[\frac{2 \sin n t}{n t^2} - \frac{(1 - \cos n t)}{n t} - \frac{(\cos n t)}{t} \right] dt + 0(1),$$

हम $\delta > 0$ को इतना छोटा चुनते हैं कि प्रतिबन्ध **(2.6)** $t \leq \delta$ के लिए संतुष्ट होता है, अतः

$$\sigma(n, t) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Phi_0(t)}{\sin^2 t/2} \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(t) \left[\frac{2 \sin n t}{n t^2} - \frac{(1 - \cos n t)}{n t} - \frac{\cos n t}{t} \right] dt + 0(1) \qquad (5.1)$$

क्योंकि (5.1) का दक्षिण पक्षीय समाकल अंतराल (δ, π) में 0 (1) है, ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, रीम-लेबेग प्रमेय का उपयोग करने से।

अब $\sigma(n, t)$ के हरात्मक रूपान्तर अर्थात् S_n के $(H, 1)(C, 1)$ रूपान्तर को $H(n, t)$ द्वारा

निरूपित करते हुए (5.1), परिभाषा तथा हरात्मक संकलन की नियमितता से हम लिखते हैं :-

$$H(n, t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\Phi_0(t)}{\sin^2 t/2} dt$$

$$= - \int_0^{\pi/n} \frac{h(t)}{\sin t/2} dt$$

$$+ \frac{2}{\pi \log n} \int_0^{\delta} h(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)} \left[\frac{2 \sin kt}{kt^2} - \frac{(1-\cos kt)}{kt} - \frac{\cos kt}{t} \right] dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi \log n} \int_0^{\pi/n} h(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)} \left[\frac{2 \sin kt}{kt^2} - \frac{(1-\cos kt)}{kt} - \frac{(1+\cos t)}{t} \right] dt$$

$$+ \frac{2}{\pi \log n} \int_{\pi/n}^{\delta} h(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)} \left[\frac{2 \sin kt}{kt^2} - \frac{(1-\cos kt)}{kt} \right] dt$$

$$- \frac{2}{\pi \log n} \int_{\pi/n}^{\delta} h(t) \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\cos kt}{(n-k+1)t} \right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[I_1 + I_2 - I_3 \right] + 0(1), \text{ माना} \tag{5.2}$$

आकलन (3.1) तथा परिकल्पना (2.6) के प्रयोग से -

$$|I_1| = \left| \frac{1}{\log n} \int_0^{\pi/n} h(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)} V(k, t) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)} \int_0^{\pi/n} |h(t)| o(k) dt$$

$$= \frac{1}{\log n} 0(n \log n) \int_0^{\pi/n} |h(t)| dt$$

$$= 0\,(1)\,, \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty \qquad (5.3)$$

खण्डशः समाकलन तथा (2.6) के सम्प्रयोग से-

$$|I_2| = \frac{1}{\log n}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(n-k+1)} \int_{\pi/n}^{\delta} h\,(t)\left[\frac{2\sin k\,t}{t^2} - \frac{(1-\cos\,k\,t)}{t}\right] d\,t\right|$$

$$= 0\left\{\frac{1}{(n+1)\log n}\right\}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{(n+1-k)}\right\}\int_{\pi/n}^{\delta}\frac{|h\,(t)|}{t^2}\,d\,t$$

$$= 0\left(\frac{1}{n\log n}\right)0\,(2\log n)\left[0\left(\frac{1}{t}\right) + 2\int 0\left(\frac{1}{t^2}\right)d\,t\right]_{\pi/n}^{\delta}$$

$$= 0\left(\frac{1}{n}\right)[\,0\;(n)\,] = 0\,(1)\,, \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty \qquad (5.4)$$

पुनः आकलन (3.4), खण्डशः समाकलन तथा (2.6) से-

$$\left|I_3\right| \le \frac{1}{\log n}\int_{\pi/n}^{\delta}\frac{|h\,(t)|}{t}\;0\;[\,\log\,(1/t)\,]\;d\,t$$

$$= O\left(\frac{1}{\log n}\right)\int_{\pi/n}^{\delta}|h\,(t)|\left[\frac{\log\,(1/t)}{t}\right]d\,t$$

$$= O\left(\frac{1}{\log n}\right)\left[0\,(1) + \int_{\pi/n}^{\delta} 0\left\{\frac{t}{\log 1/t}\right\}\left\{\frac{1+\log 1/t}{t^2}\right\}d\,t\right]$$

$$= 0\,(1) + 0\left(\frac{1}{\log n}\right)0\,\{\,\log n + \log n\,\}$$

$$= 0\,(1), \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \qquad (5.5)$$

अन्ततः (5.2) से (5.5) तक के प्रकाश में हम पाते हैं :

$$H\;(n,t) - \left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{\Phi_0\,(t)}{\sin^2 t/2}\;d\,t\right.$$

$= 0(1)$, ज्यों-ज्यों $n \to \infty$,

इससे प्रमेय 1 की उपपत्ति पूर्ण होती है।

6. प्रमेय 2 की उपपत्ति

यह देखा जा सकता है कि प्रमेय 1 की उपपत्ति में परिकल्पना (2.7) के अन्तर्गत, I_1 तथा I_2 प्रत्येक $0(1)$ है, ज्यों-ज्यों $n \to \infty$ अतः प्रमेय 2 को सिद्ध करने के उद्देश्य से हमें मात्र यह स्थापित करना पर्याप्त होगा कि परिकल्पनाओं (2.7) तथा (2.8) के अधीन

$$I_3 = 0(1), \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty.$$

अब I_3 पर विचार करते हुए हम पाते हैं:-

$$I_3 = \frac{1}{\log n}\int_{\pi/n}^{\delta}\frac{h(t)}{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(n+1-k)t}{k}\,dt$$

$$= \frac{1}{\log n}\int_{\pi/n}^{\delta}\frac{h(t)}{t}\cos(n+1)t\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos kt}{k}\right)dt$$

$$+\frac{1}{\log n}\int_{\pi/n}^{\delta}\frac{h(t)}{t}\sin(n+1)t\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin kt}{k}\right)dt,$$

$$= I_{3.1} + I_{3.2}, \text{माना} \qquad (6.1)$$

आकलन (3.2), खण्डशः समाकलन तथा (2.7) से-

$$|I_{3.2}| \le \frac{1}{\log n}\int_{\pi/n}^{\delta}\frac{|h(t)|}{t}\,0(1)\,dt$$

$$= O\left(\frac{1}{\log n}\right)\left[0(1)+\int_{\pi/n}^{\delta}0\left(\frac{1}{t}\right)dt\right]$$

$$= O\left(\frac{1}{\log n}\right)[\,0(1) + 0\,)\log n)\,]$$

$$= 0(1), \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty \qquad (6.2)$$

आगे का $I_{3.1}$ आकलन करने हेतु हम लिखते हैं :

$$2\, I_{3.1} = \frac{2}{\log n} \int_{\pi/n}^{\delta} \frac{h(t)}{t} \cos(n+1)t \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cos kt}{k}\right) dt$$

$$= \frac{2}{\log n} \int_{\pi/n}^{\delta} \frac{h(t)}{t} \cos nt \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cos kt}{k}\right) dt + 0(1)$$

$$= \frac{1}{\log n} \left[\int_{\pi/n}^{\delta - \frac{\pi}{n}} + \int_{\delta - \frac{\pi}{n}}^{\delta} \right] \frac{h(t)}{t} \cos nt \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kt}{k} \right) dt$$

$$- \frac{1}{\log n} \int_{0}^{\delta - \frac{\pi}{n}} \frac{h\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{n}\right)} \cos nt \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{k} \right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{1}{\log n} \int_{\pi/n}^{\delta - \frac{\pi}{n}} \frac{\left\{h(t) - h\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right\}}{t} \left(\sum_{1}^{m} \frac{\cos nt}{k} \right) \cos nt\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\log n} \int_{\pi/n}^{\delta - \frac{\pi}{n}} \frac{h\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{t} \left[\sum_{1}^{n} \frac{\cos kt}{k} - \sum_{n}^{n} \cos k \frac{\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{k} \right] \cos nt\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\log n} \int_{\pi/n}^{\delta - \frac{\pi}{n}} h\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t + \frac{\pi}{n}} \right] \left\{ \sum_{1}^{n} \frac{\cos k\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{k} \right\} \cos nt\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\log n}\left[\int_{\pi/n}^{\delta-\frac{\pi}{n}} - \int_{0}^{\delta-\frac{\pi}{n}}\right] \frac{h\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{t+\frac{\pi}{n}} \left[\sum_{n}^{1} \frac{\cos k\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{k}\right] \cos n t \; dt \; +$$

$$+ \frac{1}{\log n} \int_{\delta-\pi/n}^{\delta} \frac{h(t)}{t} \left(\sum_{1}^{n} \frac{\cos k t}{k}\right) \cos n t \; dt + 0(1)$$

$$= Y_1 + Y_2 + Y_3 - Y_4 + Y_5 + 0(1), \text{ माना}$$

आकलन (3.3) से स्पष्ट है कि

$$\sum_{1}^{n} \frac{\cos k\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{k} = 0\left[\log\left\{\frac{1}{t+\frac{\pi}{n}}\right\}\right]$$

आकलन (3.3) तथा परिकल्पना (2.8) से-

$$\left|Y_1\right| \le \frac{1}{\log n} \int_{\pi/n}^{\delta-\frac{\pi}{n}} \frac{\left|h(t)-h\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|}{t} 0\,(\log 1/t)\; dt$$

$=0(1)$, ज्यों-ज्यों $n \to \infty$.

पुनः

$$\left|Y_2\right| \le \frac{1}{\log n} \int_{\pi/n}^{\delta-\pi/n} \frac{\left|h\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|}{t} \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\left(k t + \frac{k\pi}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{k}\right| dt$$

$$\le \frac{1}{\log n} \int_{\pi/n}^{\delta-\frac{\pi}{n}} \frac{\left|h\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|}{t} \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right\} dt$$

$$= O\left(\frac{1}{\log n}\right)\int_{\pi/n}^{\delta-\frac{\pi}{n}} \frac{\left|h\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|}{t}\,dt$$

$$= 0(1), \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty$$

खण्डशः समाकलन तथा (2.7) के सम्प्रयोग से।

साथ ही खण्डशः समाकलन करने तथा (6.3) एवं (2.7) के सम्प्रयोग से-

$$\left|Y_3\right| \le \frac{1}{\log n}\int_{\pi/n}^{\delta-\frac{\pi}{n}} \left|h\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right| \left\{\frac{\pi/n}{t\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}\right\}$$

$$O\left\{\log\left(\frac{1}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}\right)\right\} dt$$

$$= O\left[\frac{\log\,(n/2\pi)}{n\,\log n}\right]\int_{\pi/n}^{\delta-\pi/n} \frac{\left|h\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|}{t^2}\,dt$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right)\left[\,O\left(\frac{1}{t}\right)+2\int O\left(\frac{1}{t^2}\right)dt\,\right]_{\pi/n}^{\delta-\frac{\pi}{n}}$$

$$= 0(1), \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty,$$

परिकल्पना (2.7) के प्रयोग से हम पाते हैं-

$$\left|Y_4\right| \le \frac{1}{\log n}\int_0^{\pi/n} \frac{\left|h\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|}{t+\frac{\pi}{n}}\;O\left\{\log\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{n}}\right)\right\} dt$$

$$= O\left(\frac{1}{\log n}\right)\int_{\pi/n}^{2\pi/n} \frac{|h(t)|}{t} \log(1/t)\, dt$$

$$= O(n) \int_{\pi/n}^{2\pi/n} |h(t)|\, dt$$

तथा

$$|Y_5| \leq \frac{1}{\log n} \int_{\delta-\frac{\pi}{n}}^{\delta} |h(t)|\, dt$$

$$= 0\left[\frac{|\log(\delta-\frac{\pi}{n})|}{(\delta-\frac{\pi}{n})\log n}\right]\int_{\delta-\frac{\pi}{n}}^{\delta} |h(t)|\,dt$$

$= 0(1)$, ज्यों - ज्यों $n \to \infty$

इस प्रकार हमने दर्शाया है कि

$$I_{3.1} = 0(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty \tag{6.4}$$

अन्ततः (6.1), (6.2) तथा (6.4) के परिणामों से स्पष्ट है कि

$$I_3 = 0(1), \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty$$

इससे प्रमेय 2 भलीभाँति स्थापित होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध पत्र की तैयारी में दो आदरणीय सेवानिवृत्त प्राचार्यों डॉ० पी० डी० कठल एवं डॉ० एम० पी० सचान ने जो अत्यन्त उपयोगी सुझाव एवं सक्रिय सहयोग दिया है तथा डॉ० सी० के० शर्मा, प्राध्यापक गणित, अवधेश प्रतापसिंह विश्वविद्यालय, प्राध्यापन विभाग, रीवाँ जो प्रोत्साहन दिया है, उसके लिए लेखक इन सभी महानुभावों के हृदय से आभारी हैं।

निर्देश

1. सिद्दीकी, जे० ए०, प्रोसी० इण्डियन अकेड० साइंस सेक्शन A, 1948, 28, 527-531.
2. हिल्ले, ई० तथा तमारकिन, जे० डी०, ट्रांस०, अमेर० मैथ० सोसा०, 1932, 34, 757-783
3. सक्सेना, के०, ज्ञानाभ (उरई, उ० प्र०), 1985, 15, 215-223.
4. सचान, एम० पी०, ज्ञानाभ (उरई, उ० प्र०), 1983, 13, 47-54.
5. टिशमार्श, ई० सी०, दी थ्योरी ऑफ फंक्शन्स, ऑक्सफोर्ड, 1961, 176, 40-43.
6. हार्डी, जी० एच० तथा रोगोसिंस्की, डब्लू० डब्लू० प्रोसी० कैम्ब्रिज फिलोस० सोसा०, 1947, 43.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 1, January, 1997

ताजे पानी में रहने वाली मछली पर पेस्टीसाइड का प्रभाव

ए० के० श्रीवास्तव

प्राणी विज्ञान विभाग, हवाबाग वीमेन्स कॉलेज, जबलपुर

[प्राप्त-दिसम्बर 1,1996]

सारांश

धान के खेतों में प्रयुक्त होने वाले पेस्टीसाइड किलेक्स कार्बैरिल के प्रभाव का अध्ययन ताजे पानी में रहने वाली मछली चन्ना गचुआ के साथ किया गया। यह पाया गया कि हवा में खुला रखने पर इस पेस्टीसाइड का प्रभाव समय के साथ घटता गया।

Abstract

Pesticidal Impact on Fresh Water Teleost Channa Gachua (HAM) *By* A. K. Shrivastava, Department of Zoology, Hawabag Women's College, Jabalpur

Kelex carbaryl a contact stomach poison is being used to control insect pests in the rice cultivation. Its toxic potency in solution decreased with an increase in exposure period in air. The carbaryl was less toxic to fresh water fish Channa Gachua.

प्रस्तावना

आजकल भारत में धान के साथ-साथ मछली पालन सामान्य प्रथा है। कतला, रोहू तथा मिर्गल मछलियाँ तालों की अपेक्षा धान के खेतों में तेजी से बढ़ती हैं।[5][4] धान के खेतों में पेस्टीसाइड के प्रयोग से फसलों के खेतों में मछली पालन में अवशोध आया। राव[8] एवं झिंगरन[5] ने जल प्रदूषण के कारण मछलियों की मृत्यु की सूचना दी है। किलेक्स कार्बैरिल कीटों के लिए संपर्क तथा उदर विष का कार्य करता है। चूंकि रीवॉ के पास जावा क्षेत्र में इस कीटनाशी का प्रयोग अनेक जीवाशियों के

नियन्त्रण हेतु किया जाता है इसलिए हमने किलेक्स कार्बैरिल की विषालुता चन्ना गाचुआ मछली पर किया।

प्रयोगात्मक

स्थानीय हाट से 80-140 ग्राम भार की जीवित चन्ना गाचुआ मछलियाँ खरीदी गईं। वे अक्षत तथा स्वस्थ थीं। इन्हें प्रयोगशाला में कांच के जलाशय में विक्लोरीनित जल में रखा गया। सारे प्रयोग प्राकृ तिक प्रकाश में $28 \pm 1°$ ताप पर सम्पन्न किये गये ।

विषालुता ज्ञात करने के लिए मानक विधि[2] (A P H A 1965) का प्रयोग किया गया। एक ही आकार की छह मछलियों को 10 लीटर जल में किलेक्स कार्बैरिल की विभिन्न सान्द्रताओं में रखा गया। मछलियों को केंचुआ खिलाया गया। प्रयोग के दौरान प्रतिदिन प्रातः संवर्ध माध्यम को बदला गया। कृत्रिम चालन नहीं किया गया। 96 घंटे तक पेस्टीसाइड के प्रभाव का अध्ययन किया गया। मृत्यु दर से TL m मान लिचेन फील्ड तथा विलोकावसन विधि[6] समान ज्ञान किये गये।

पेस्टीसाइड की हानिरहित सान्द्रता का परिणाम हार्ट द्वारा प्रस्तावित सूत्र से किया गया।[3]

$$C = \frac{48 \text{ hrs. TLm} \times A}{S^2}$$

जहाँ C = संभावित हानिरहित सान्द्रता

S = 24 hrs. TLm/ 48 TLm

A = सम्प्रयोग गुणक = 0.3.

शक्ति दीर्घस्थायित्व के परीक्षण हेतु 29 ppm (24 hrs. TLm मान) का किलेक्स कार्बैरिल विलयन तैयार करके उसे 5, 10, 15, 20 तथा 25 दिनों तक काँच के बर्तन में हवा में खुला छोड़ दिया गया। उसके बाद एक ही आकार की छह मछलियाँ डाल कर मृत्यु दर का अवलोकन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 से स्पष्ट है कि जब सम्पर्क काल की अवधि बढ़ाई गई तो विषालुता अधिक प्रकट थी। प्रति 24 घंटे पर विषालुता में 1.3 गुनी वृद्धि हुई। किलेक्स कार्बैरिल की वह सान्द्रता जिस पर वह हानिरहित था, 4.41 ppm है। वायु में खुला रखने पर इस पेस्टीसाइड का विषैला प्रभाव शीघ्र ही जाता रहा (सारणी 2) ताजा 29 ppm घोल के साथ मछली के लिये TL m मान 24 घंटे था किन्तु अब इस घोल को 5 दिनों तक वायु में खुला छोड़ दिया गया, तो यह मान 5 दिन हो गया और 15 दिनों के बाद एक भी मछली नहीं मरी। इसका अर्थ यह हुआ कि किलेक्स कार्बैरिल की विषैली शक्ति घोल में 5 दिनों तक बनी रही।

सारणी 1

किलेक्स कार्बेरिल के (मीडियन टालरेंस लिमिट) मान तथा विश्वास सीमाएं (मिग्रा पेस्टीसाइड शक्ति/लीटर जल)

समय (घंटा)	जीवित भार (ग्राम)	TLm (ppm)	विश्वास सीमाएं
24	80-140	29	26.5-31.5
48	80-140	23	21.0-24.0
72	80-140	18	16.5-18.0
96	80-140	14	13.5-14.5

सारणी 2

किलेक्स कार्बेरिल के सम्बन्ध में प्रेक्षण

परीक्षण विलयन की सान्द्रता (ppm)	परीक्षण के पूर्व वायु में खुला रखने की अवधि (दिनों में)	जितने दिनों बाद परीक्षण मछलियाँ मरी
29	5	2
29	10	25
29	15	45
29	20	45
29	25	45

कार्बेरिल अर्थात् 1-नैफ्थिल का 96 घंटे का LC^{50} मान चन्ना पंक्टेटस के लिए 2.91 ppm था। आबिदी[1] ने इससे भिन्न परिणाम प्राप्त किये क्योंकि उन्होंने कर्बमिट का प्रयोग किया। हमने किलेक्स कार्बेरिल का प्रयोग किया जो कार्बोमिट का कम विषैला संरूप है।

निर्देश

1. आबिदी आर०, प्रोसी० नेशनल एके० साइंस इंडिया, 1983, 53, 157-16.
2. अमेरिकन पब्लिक हेल्थ ऐसोशियेशन (APHA), American water works association and water pollution control, Federation, 1975 Standard Methods Examination of water and waste water.
3. हार्ट, डब्लू, बी० पी०, डूडोर्फ तथा ग्रीन बैंक जे०, The evaluation of toxicity of industrial waste, chemicals and other substances to fresh water fishes. The Atlantic Refining Co. Philadelphia. 1945 p. 256.

4. आयंगर, एच० डी० आर०, *Ind. J. Vet. Sci. and Animal Husbandry* 1953, *23* (4) : 289-297.

5. झिगंरन, वी० जी०, द्वितीय संस्करण हिन्दुस्तान पब्लिकेशन्स कार्पोरेशन ऑफ इंडिया, नई दिल्ली, 1982 पृष्ठ 475-477.

6. बिचफील्ड जे० टी तथा विलोकाक्सान एफ०, *J. Pharm. Exp. Theor.* 1949, *29* : 99-133.

7. पंवार आर० एस० त्यागी, आर० के०, सिंह, डी० एन० तथा सेठ आर० एन०, *Proc. Sem. Eff. Pest. Ag. Fau*, 1984, 99-105.

8. राव, टी० एस, दत्ता एस तथा मंगैश के०, Environ, *Health* 1967, *8*, 103-106

9. तिलक के० एस०, Matsya, 1982 , *8*, 45-47.

10. वर्मा एस० आर०, बंसल, एस० के० तथा दलेला आर० सी०, *J. Environ. Health* 1982, *19*, 107-115.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 1, January, 1997

उत्तेजक वोल्टता की आवृत्ति पर जोशी प्रभाव की निर्भरता

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कॉलेज, मेरठ

[प्राप्त-जनवरी 8, 1996]

सारांश

उत्तेजक विभव की 50-500 हर्ट्स परिसर में आवृत्ति f का हाइड्रोजन ओज़ोनित्र में जोशी प्रभाव $-\% \Delta_i$ पर प्रभाव का अध्ययन किया गया। f में वृद्धि से विसर्जन धारा i में वृद्धि और देहली विभव V_m तथा $-\% \Delta_i$ में ह्रास पाया गया। इनकी व्याख्या Δ_i परिघटना के लिये जोशी सिद्धान्त के आधार पर की गई है।

Abstract

Dependence of the Joshi effect on the frequency of the exciting voltage. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Influence of the frequency f in the range 50-500. Herts of the exciting potential on the Joshi effect $-\% \Delta_i$ has been studied in a hydrogen ozonizer. Increase in f has been found to increase the discharge current i and decrease the threshold potential V_m and $-\% \Delta_i$. These have been accounted for the Joshi theory for the phenomenon Δ_i.

जोशी एवं लैड[1] ने देखा कि क्लोरीन ओज़ोनित्र में कुछ मोगासाइकिल की धारा प्रवाहित करने पर कोई जोशी प्रभाव प्रेक्षणीय नहीं होता है। f की वृद्धि से $-\% \Delta_i$ में ह्रास होने का प्रेक्षण ऑक्सीजन में मोहंती[2] ने और आयोडीन वाष्प में सुब्रह्मन्यम[3] ने किया है। अतः ओज़ोनित्र उत्तेजन के अन्तर्गत शोधित हाइड्रोजन में इस कारक का अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त उपकरण, हाइड्रोजन ओज़ोनित्र ($pH_2 = 50\,mm, 30°C$) को 50, 60, 100, 500 हर्ट्स की ए० सी० द्वारा उत्तेजन के लिए प्रयुक्त विद्युत् परिपथ और विसर्जन धारा-अंधकार में धारा i_D तथा 200 वाट 220 वोल्ट के तापदीप्त काँच लैंप द्वारा किरणन के अन्तर्गत धारा i_L को परावर्तन धारामापी द्वारा मापन के लिए पूर्व प्रकाशित[4,5] विधियों का अनुसरण किया गया। 60, 100 तथा 500 हर्ट्स की ए० सी० को प्राप्त करने के लिए 220 वोल्ट की मुख्य संभरण डी० सी० पर कार्य करने वाले परिवर्तित्रों को प्रयुक्त किया गया। नेट जोशी प्रभाव, $\Delta_i = i_L - i_D$ तथा आपेक्षिक जोशी प्रभाव, $\%\Delta_i$ का मान $100\,\Delta_i/i_D$ है।

परिणाम तथा विवेचना

f के 50 से 500 हर्ट्स तक बढ़ने से देहली विभव V_m 0.50 से 0.48 kV तक घट गया। 500 हर्ट्स ए० सी० के अतिरिक्त सभी 50, 60 तथा 100 हर्ट्स की ए० सी० के साथ गिरते i - V अभिलक्षणों का प्रेक्षण हुआ। एक निश्चित अनुप्रयुक्त विभव V पर विसर्जन धारा i का मान अनुप्रयुक्त उत्तेजक ए० सी० की आवृत्ति की वृद्धि के साथ बढ़ा हुआ पाया गया। i की V के साथ वृद्धि की गति, 50 हर्ट्स की तुलना में 500 हर्ट्स के साथ बहुत अधिक तीव्र थी। V_m के नीचे कोई $\pm\Delta_i$ प्रेक्षणीय नहीं था। किरणन के दौरान, चारों आवृत्तियों में V_m पर 100% धारा निरोध का प्रेक्षण हुआ। 50, 60 तथा 100 हर्ट्स की ए० सी० के साथ $-\%\Delta_i$ धीरे-धीरे 0.50 kV पर 100 से 2.20 kV पर 15% तक घटता गया, जबकि 500 हर्ट्स की ए० सी० के साथ यह तीव्र गति से 0.48 kV पर 100 से 0.96 kV पर तथा इसके पश्चात् 0 तक घटता गया।

वह विभव जिस पर V के तनिक बढ़ने से i तीव्र गति से बढ़ जाता है, V_m के मापन f से परिवर्तनों[6] के प्रति बहुत संवेदनशील होते हैं। तथापि, पाशन विभव[7] की तुलना में, इस प्रकार के परिवर्तनों के प्रति V_m अधिक संवेदनशील होगा। f की वृद्धि से V_m में प्रेक्षित कमी इस अपेक्षा के अनुकूल है।

गिरते i-V अभिलक्षणों के प्रस्तुत प्रेक्षण की व्याख्या, पूर्व प्रकाशित[8] विचार के अनुसार, अन्तराकाशी आवेश की वृद्धि के आधार पर की जा सकती है। f के साथ i में वृद्धि पूर्व प्रकाशित[9] लेख के बिल्कुल समान है। V_m से नीचे Δ_i का प्रेक्षण न होना, क्लोरीन में जोशी[10] के तथा ऑक्सीजन में मोहंती एवं कामथ[11] के परिणामों के अनुकूल है। अथ च, इस विभव पर $\%\Delta_i$ अधिकतम है। परिघटना के सम्बन्ध में ये परिणाम V_m के मौलिक महत्व की ओर इंगित करते हैं।

हाइड्रोजन में $\%\Delta_i$ पर f का प्रेक्षित प्रभाव, क्लोरीन में जोशी[10] की उस व्यापक स्थापना की पुष्टि करता है जिसमें कहा गया है कि, अन्य विषम, समान होते हुए, निवेशित आवृत्ति f की वृद्धि से $\%\Delta_i$ घट जाता है। प्रस्तुत अध्ययन से प्राप्त परिणाम, वर्ण-विक्षेपण के क्रैमर के क्वान्टम यान्त्रिक सिद्धान्त के आधार पर परशाद[12] द्वारा जोशी प्रभाव की व्याख्या की पुष्टि नहीं करते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

जी० एम० पण्डित के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. जोशी, एस० एस० एवं लैड, के० जैड, प्रोसी० इण्डियन एके० साइं०, 1945, **22**, 293
2. मोहंती, एस० आर०, जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०, 1949, **26**, 507।
3. सुब्रह्मन्यम्, एन०, प्रोसी० इण्डियन साइंस कांग्रेस, 1951, फिज़ि० सेक०, ऐब्स्ट 32।
4. प्रसाद, जे०, ऐक्टा सिएन्सिया इण्डिका, 1974, **1**, 13।
5. प्रसाद, जे०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1993, **36**, 231
6. जोशी, एस० एस०, करेण्ट साइंस, 1939, **8**, 548।
7. जोशी, एस० एस०, वही, 1946, **15**, 281।
8. प्रसाद, जे०, जर्न० साइंस० रिस०, गुरुकुल कांगड़ी विश्व०, 1971, 3, 10।
9. प्रसाद, जे०, एन० सोक० केम० पोलोनो, 1972, **46**, 1629
10. जोशी, एस० एस०, प्रोसी० इण्डियन एके० साइं० 1945, **22**, 389।
11. मोहंती, एस० आर० एवं कामथ, जी० एस०, जर्न० इण्डियन केमि० सोसा० 1948, **25**, 405,
12. परशाद, आर०, नेचर, 1945, **155**, 362

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40 No. 1, January, 1997.

चार चरों वाले कतिपय हाइपरज्यामितीय फलनों के संलग्न फलनों के मध्य सम्बन्ध

आर० के० समतनी तथा आर० सी० भट्ट

गणित तथा सांख्यिकी विभाग,
जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त-सितम्बर 20, 1995]

सारांश

इस प्रपत्र में चार-चरों के लिए संलग्न फलन सम्बन्ध व्युत्पन्न किये गये हैं।

Abstract

Relations Between Functions Contiguous to Certain Hypergeometric Functions of Four Variables *By* R. K. Samtani and R. C. Bhatt, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj).

In this paper we derived contiguous function relations for four variables. The purpose of present paper is to study the function contiguous to $F_2^{(4)}$ and to obtain their recurrence relations with these functions.

1. प्रस्तावना

दो तथा तीन चरों वाले संलग्न फलन सम्बन्ध भट्ट[1] तथा श्रीवास्तव[2] 1965 में ही प्राप्त कर लिया था।

चतुष्क हाइपरज्यामितीय फलन के निम्नलिखित संकेतनों को शर्मा तथा परिहार [3, p 121-133] ने परिभाषित किया है।

$$F_2^{(4)}\left(a_1, a_1; a_2, a_2, b_1, b_1, b_1, b_1; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right)$$

$$= \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{p+q}(b_1)_{m+n+p+q}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p(c_4)_q} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!} \tag{1.1}$$

सुविधा की दृष्टि से हम निम्नलिखित आपरेटरों को बताने के लिए θ, ϕ, ψ तथा δ अक्षरों का प्रयोग करेंगे।

$$x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial z} \text{ तथा } t\frac{\partial}{\partial t}$$

तथा फलन

$$F_2^{(4)}\left(a_1+1, a_1+1, a_2, a_2, b_1, b_1, b_1, b_1; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right)$$

को $F_2^{(4)}(a+)$ द्वारा अंकित करेंगे।

2. $F_2^{(4)}$ के संलग्न फलन के मध्य सम्बन्ध

(1.1) से हमें निम्न की प्राप्ति होगी।

$$a_1 F_2^{(4)}(a_1+) = (a_1+\theta+\phi) F_2^{(4)} \tag{2.1}$$

$$a_2 F_2^{(4)}(a_2+) = (a_2+\psi+\delta) F_2^{(4)} \tag{2.2}$$

$$b_1 F_2^{(4)}(b_1+) = (b_1+\theta+\phi+\psi+\delta) F_2^{(4)} \tag{2.3}$$

$$(c_1-1) F_2^{(4)}(c_1-) = (c_1+\theta-1) F_2^{(4)} \tag{2.4}$$

$$(c_2-1) F_2^{(4)}(c_2-) = (c_2+\phi-1) F_2^{(4)} \tag{2.5}$$

$$(c_3-1) F_2^{(4)}(c_3-) = (c_3+\psi-1) F_2^{(4)} \tag{2.6}$$

$$(c_4-1)\,F_2^{(4)}(c_4-)=(c_4+\delta-1)\,F_2^{(4)} \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial^{i+j+k+1}}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^1}F_2^{(4)}=\frac{(a_1)_{i+j}(a_2)_{k+1}(b_1)_{i+j+k+1}}{(c_1)_i(c_2)_j(c_3)_k(c_4)_1}$$

$$F_2^{(4)}\Big(a_1+i+j\,,\,a_2+k+1\,,\,b_1+i+j+k+1\,;\,c_1+i\,,\,c_2+j\,,\,c_3+k\,,\,c_4+1\,;\,x\,,y\,,z\,,t\Big) \qquad (2.8)$$

साथ ही $F_2^{(4)}$ द्वारा तुष्ट होने वाले आंशिक अवकल समीकरणों को निम्न के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\Big[\theta(\theta+c_1-1)-x(\theta+\phi+a_1)(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big]F_2^{(4)}=0 \qquad (2.9)$$

$$\Big[\phi(\phi+c_2-1)-y(\theta+\phi+a_1)(\theta+\phi+\delta+\psi+b_1)\Big]F_2^{(4)}=0 \qquad (2.10)$$

$$\Big[\psi(\psi+c_3-1)-z(\psi+\delta+a_2)(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big]F_2^{(4)}=0 \qquad (2.11)$$

$$\Big[\delta(\delta+c_4-1)-t(\psi+\delta+a_2)(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big]F_2^{(4)}=0 \qquad (2.12)$$

समीकरण (2.9) में a_1 के स्थान पर (a_1-1) रखने पर

$$\Big[\theta(\theta+c_1-1)-x(\theta+\phi+a_1-1)(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big]F_2^{(4)}(a_1-1)=0$$

$$\Big[(\theta-\phi+c_1-a_1)-x(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big](\theta+\phi+a_1-1)\,F_2^{(4)}(a_1-1)$$

$$+(\phi+a_1-1)(\phi+a_1-c_1)\,F_2^{(4)}(a_1-1)=0$$

प्राप्त होता है जो (2.1) के बल पर

$$\Big[(\theta-\phi-a_1+c_1)-x(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big](a_1-1)F_2^{(4)}$$

$$+(\phi+a_1-1)(\phi+a_1-c_1)F_2^{(4)}(a_1-1)=0 \quad (2.13)$$

प्रदान करता है। इसी तरह

$$\Big[(\theta-\phi-\psi-\delta-b_1+c_1)-x(\theta+\phi+a_1)\Big](b_1-1)F_2^{(4)}$$

$$+(\phi+\psi+\delta+b_1-c_1)(\phi+\psi+\delta+b_1-1)F_2^{(4)}(b_1-1)=0 \quad (2.14)$$

$$\Big[\theta-x(\theta+2\phi+\psi+\delta+a_1+b_1-c_1)\Big]c_1F_2^{(4)}-x(\phi+a_1-c_1)$$

$$\cdot(\theta+\psi+\delta+b_1-c_1)F_2^{(4)}(c_1+1)=0 \quad (2.15)$$

$$\Big[(\phi-\theta-a_1+c_2)-y(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big](a_1-1)F_2^{(4)}$$

$$+(\theta+a_1-1)(\theta+a_1-c_2)F_2^{(4)}(a_1-1)=0 \quad (2.16)$$

$$\Big[(\phi-\theta-\psi-\delta-b_1+c_2)-x(\theta+\phi+a_1)\Big](b_1-1)F_2^{(4)}$$

$$+(\theta+\psi+\delta+b_1-1)(\theta+\psi+\delta+b_1-c_2)F_2^{(4)}(b_1-1)=0 \quad (2.17)$$

$$\Big[\phi-x(2\theta+\phi+\psi+\delta+a_1+b_1-c_2)\Big]c_2F_2^{(4)}-x(\theta+a_1-c_2)$$

$$(\theta+\psi+\delta+b_1-c_2)F_2^{(4)}(c_2+1)=0 \quad (2.18)$$

$$\Big[(\psi-\delta-a_2+c_3)-z(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big](a_2-1)F_2^{(4)}$$

$$+(\delta+a_2-1)(\delta+a_2-c_3)F_2^{(4)}(a_2-1)=0 \quad (2.19)$$

$$\Big[(\psi-\theta-\phi-\delta-b_1+c_3)-z(\psi+\delta+a_2)\Big](b_1-1)F_2^{(4)}$$
$$+(\theta+\phi+\delta+b_1-1)(\theta+\phi+\delta+b_1-c_3)F_2^{(4)}(b_1-1)=0 \quad (2.20)$$

$$\Big[\psi-z(\theta+\phi+\psi+2\delta+a_2+b_1-c_3)\Big]c_3F_2^{(4)}-z(\delta+a_2-c_3)$$
$$\cdot(\theta+\phi+\delta+b_1-c_3)F_2^{(4)}(c_3+1)=0 \quad (2.21)$$

$$\Big[(\delta-\psi-a_2+c_4)-t(\theta+\phi+\psi+\delta+b_1)\Big](a_2-1)F_2^{(4)}$$
$$+(\psi+a_2-1)(\psi+a_2-c_4)F_2^{(4)}(a_2-1)=0 \quad (2.22)$$

$$\Big[(\delta-\theta-\phi-\psi-b_1+c_4)-t(\psi+\delta+a_2)\Big](b_1-1)F_2^{(4)}$$
$$+(\theta+\phi+\psi+b_1-c_4)(\theta+\phi+\psi+b_1-1)F_2^{(4)}(b_1-1)=0 \quad (2.23)$$

$$\Big[\delta-t(\theta+\phi+2\psi+\delta+a_2+b_1-c_4)\Big]c_4F_2^{(4)}-t(\psi+a_2-c_4)$$
$$(\phi+\theta+\psi+b_1-c_4)F_2^{(4)}(c_4+1)=0 \quad (2.24)$$

3. $F_2^{(4)}$ से सम्बद्ध संलग्न फलन सम्बन्ध

(2.1) - (2.8) तथा (2.13) - (2.24), समीकरणों के मध्य θ, ϕ, ψ तथा δ को विलोपन करने पर हमें कई आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त होते हैं जो $F_2^{(4)}$ को स्वयं में संलग्न फलन से सम्बन्धित करते हैं।

उदाहरणार्थ- (2.1), (2.2) तथा (2.3), का प्रयोग करने पर

$$(b_1-a_1-a_2)F_2^{(4)}=b_1F_2^{(4)}(b_1+1)-a_1F_2^{(4)}(a_1+1)-a_2F_2^{(4)}(a_2+1) \quad (3.1)$$

प्राप्त होता है और समीकरण (2.1), (2.4) तथा (2.5) का प्रयोग करने पर

$$(a_1-c_1-c_2+2)\,F_2^{(4)}=a_1\,F_2^{(4)}\,(a_1+1)-(c_1-1)\,F_2^{(4)}\,(c_1-1)-(c_2-1)\,F_2^{(4)}(c_2-1) \tag{3.2}$$

एवं समीकरण (2.2), (2.6), (2.7) का प्रयोग करने पर

$$(a_2-c_3-c_4+2)\,F_2^{(4)}=a_2\,F_2^{(4)}(a_2+1)-(c_3-1)\,F_2^{(4)}(c_3-1)-(c_4-1)\,F_2^{(4)}(c_4-1) \tag{3.3}$$

समीकरण (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) तथा (2.7) का प्रयोग करने पर

$$(b_1-c_1-c_2-c_3-c_4+4)\,F_2^{(4)}=b_1\,F_2^{(4)}(b_1+1)-(c_1-1)\,F_2^{(4)}(c_1-1)$$
$$-(c_2-1)\,F_2^{(4)}(c_2-1)-(c_3-1)\,F_2^{(4)}(c_3-1)-(c_4-1)\,F_2^{(4)}(c_4-1). \tag{3.4}$$

समीकरण (2.1) एवं (2.8) का प्रयोग करने पर

$$a_1\,F_2^{(4)}=a_1\,F_2^{(4)}(a_1+1)-x\frac{a_1\,b_1}{c_1}\,F_2^{(4)}(a_1+1,\,b_1+1,\,c_1+1)$$
$$-y\frac{a_1\,b_1}{c_2}\,F_2^{(4)}\Big(a_1+1,\,b_1+1,\,c_2+1\Big) \tag{3.5}$$

प्रदान करते हैं।

समीकरण (2.2) तथा (2.8) से

$$a_2\,F_2^{(4)}=a_2\,F_2^{(4)}(a_2+1)-z\frac{a_2\,b_1}{c_3}\,F_2^{(4)}(a_2+1,\,b_1+1,c_3+1)$$
$$-t\,\frac{a_2\,b_1}{c_4}\,F_2^{(4)}(a_2+1,\,b_1+1,\,c_4+1) \tag{3.6}$$

समीकरण (2.3) तथा (2.8) से

$$b_1\,F_2^{(4)}=b_1\,F_2^{(4)}(b_1+1)-x\,\frac{a_1\,b_1}{c_1}\,F_2^{(4)}(a_1+1,\,b_1+1,\,c_1+1)$$
$$-y\,\frac{a_1\,b_1}{c_2}\,F_2^{(4)}(a_1+1,\,b_1+1,\,c_2+1)-z\,\frac{a_2\,b_1}{c_3}\,F_2^{(4)}(a_2+1,\,b_1+1,\,c_3+1)$$

$$-t\,\frac{a_2\,b_1}{c_4}\,F_2^{(4)}(a_2+1\,,b_1+1\,,c_4+1)\,. \tag{3.7}$$

समीकरण (2.4) तथा (2.8) से

$$(c_1-1)\,F_2^{(4)}=(c_1-1)\,F_2^{(4)}(c_1-1)-x\,\frac{a_1\,b_1}{c_1}\,F_2^{(4)}(a_1+1\,,b_1+1\,,c_1+1)\,. \tag{3.8}$$

समीकरण (2.5) तथा (2.8) से

$$(c_2-1)\,F_2^{(4)}=(c_2-1)\,F_2^{(4)}(c_2-1)-y\,\frac{a_1\,b_1}{c_2}\,F_2^{(4)}(\,a_1+1\,,b_1+1\,,c_2+1\,)\,. \tag{3.9}$$

समीकरण (2.6) तथा (2.8) से

$$(c_3-1)\,F_2^{(4)}=(c_3-1)\,F_2^{(4)}(\,c_3-1)-z\,\frac{a_2\,b_1}{c_3}\,F_2^{(4)}(\,a_2+1,\,b_1+1,\,c_3+1\,)\,. \tag{3.10}$$

समीकरण (2.7) तथा (2.8) से

$$(c_4-1)\,F_2^{(4)}=(\,c_4-1)\,F_2^{(4)}\,(c_4-1\,)-t\,\frac{a_2\,b_1}{c_4}\,F_2^{(4)}\,(a_2+1\,,b_1+1\,,c_4+1\,) \tag{3.11}$$

प्राप्त होते हैं तथा जब हम (2.3) तथा (2.8) का प्रयोग (2.13), (2.16), (2.19) एवं (2.22) में करते हैं तो निम्नलिखित संलग्न सम्बन्ध प्राप्त होते हैं—

$$\begin{aligned}
(a_1-c_1)\,F_2^{(4)}+x\,b_1\,F_2^{(4)}(b_1+1\,) &= (a_1-c_1)\,F_2^{(4)}(a_1-1) \\
&+x\,\frac{a_1\,b_1}{c_1}\,F_2^{(4)}(a_1+1\,,b_1+1\,,c_1+1\,)-y\,\frac{a_1\,b_1}{c_2}\,F_2^{(4)}(\,a_1+1\,,b_1+1\,,c_2+1) \\
&+y^2\,\frac{a_1\,b_1\,(\,b_1+1)}{c_2\,(c_2+1)}\,F_2^{(4)}(a_1+1\,,b_1+2\,,c_2+2\,) \\
&+\,y\,\frac{(\,2\,a_1-c_1-1\,)\,b_1}{c_2}\,F_2^{(4)}(\,a_1\,,b_1+1\,,c_2+1\,)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$(a_1-c_2)\, F_2^{(4)}+y\, b_1\, F_2^{(4)}(b_1+1)=(a_1-c_2)\, F_2^{(4)}(a_1-1)$$

$$+y\,\frac{a_1\, b_1}{c_2}\, F_2^{(4)}(a_1+1\,,b_1+1\,,c_2+1)-x\,\frac{a_1\, b_1}{c_1}\, F_2^{(4)}(a_1+1\,,b_1+1\,,c_1+1)$$

$$+x\,\frac{(2\,a_1-c_1-1)\, b_1}{c_1}\, F_2^{(4)}(a_1\,,b_1+1\,,c_1+1)$$

$$+x^2\,\frac{a_1\, b_1}{c_1}\, F_2^{(4)}(a_1+1\,,b_1+1\,,c_1+1) \qquad (3.13)$$

$$(a_2-c_3)\, F_2^{(4)}+z\, b_1\, F_2^{(4)}(b_1+1)=(a_2-c_3)\, F_2^{(4)}(a_2-1)$$

$$+z\,\frac{a_2\, b_1}{c_3}\, F_2^{(4)}(a_2+1\,,b_1+1\,,c_3+1)-t\,\frac{a_2\, b_1}{c_4}\, F_2^{(4)}(a_2+1\,,b_1+1\,,c_4+1)$$

$$+t^2\,\frac{a_2\, b_1\,(b_1+1)}{c_4\,(c_4+1)}\, F_2^{(4)}(a_2+1\,,b_1+2\,,c_4+2)$$

$$+t\,\frac{(2\,a_2-c_3-1)\, b_1}{c_4}\, F_2^{(4)}(a_2\,,b_1+1\,,c_4+1) \qquad (3.14)$$

$$(a_2-c_4)\, F_2^{(4)}+t\, b_1\, F_2^{(4)}(a_1+1)=(a_2-c_4)\, F_2^{(4)}(a_2-1)$$

$$+t\,\frac{a_2 b_1}{c_4}\, F_2^{(4)}(a_2+1\,,b_1+1\,,c_4+1\,,)-z\,\frac{a_2\, b_1}{c_3}\, F_2^{(4)}(a_2+1\,,b_1+1\,,c_3+1)$$

$$+z^2\,\frac{a_2\, b_1\,(b_1+1)}{c_3\,(c_3+1)}\, F_2^{(4)}(a_2\,,b_1+2\,,c_3+2)$$

$$+z\,\frac{(2\,a_2-c_4-1)\, b_1}{c_3}\, F_2^{(4)}(a_2,\,b_1+1\,,c_3+1) \qquad (3.15)$$

अन्तिम चार संलग्न सम्बन्धों को व्युत्पन्न किया जा सकता है जब (2.1) तथा (2.8) का प्रयोग (2.14), (2.17) एवं (2.2) में तथा (2.8) का प्रयोग (2.20) एवं (2.23) में किया जाता है।

$$(b_1 - c_1) F_2^{(4)} + x a_1 F_2^{(4)} (a_1 + 1) = (b_1 - c_1) F_2^{(4)} (b_1 - 1)$$

$$+ x \frac{a_1 b_1}{c_1} F_2^{(4)} (a_1 + 1, b_1 + 1, c_1 + 1) - y \frac{a_1 b_1}{c_2} F_2^{(4)} (a_1 + 1, b_1 + 1, c_2 + 1)$$

$$- z \frac{a_2 b_1}{c_3} F_2^{(4)} (a_2 + 1, b_1 + 1, c_3 + 1) - t \frac{a_2 b_1}{c_4} F_2^{(4)} (a_2 + 1, b_1 + 1, c_4 + 1)$$

$$+ y \frac{a_1 (2b_1 - c_1 - 1)}{c_2} F_2^{(4)} (a_1 + 1, b_1, c_2 + 1)$$

$$+ z \frac{a_2 (2b_1 - c_1 - 1)}{c_3} F_2^{(4)} (a_2 + 1, b_1, c_3 + 1)$$

$$+ t \frac{a_1 (2b_1 - c_1 - 1)}{c_4} F_2^{(4)} (a_2 + 1, b_1, c_4 + 1)$$

$$+ y^2 \frac{a_1 b_1 (a_1 + 1)}{c_2 (c_2 + 1)} F_2^{(4)} (a_1 + 2, b_1 + 1, c_2 + 2)$$

$$+ z^2 \frac{a_2 b_1 (a_2 + 1)}{c_3 (c_3 + 1)} F_2^{(4)} (a_2 + 2, b_1 + 1, c_3 + 2)$$

$$+ t^2 \frac{a_2 b_1 (a_2 + 1)}{c_4 (c_4 + 1)} F_2^{(4)} (a_1 + 2, b_1 + 1, c_4 + 2)$$

$$+ 2 y z \frac{a_1 a_2 b_1}{c_2 c_3} F_2^{(4)} (a_1 + 1, a_2 + 1, b_1 + 1, c_2 + 1, c_3 + 1)$$

$$+ 2 y t \frac{a_1 a_2 b_1}{c_2 c_4} F_2^{(4)} (a_1 + 1, a_2 + 1, b_1 + 1, c_2 + 1, c_4 + 1)$$

$$+ 2 z t \frac{a_2 b_1 (a_2 + 1)}{c_3 c_4} F_2^{(4)} (a_2 + 2, b_1 + 1, c_3 + 1, c_4 + 1) \qquad (3.16)$$

$$(b_1 - c_2) F_2^{(4)} + x a_1 F_2^{(4)} (a_1 + 1) = (b_1 - c_2) F_2^{(4)} (b_1 - 1)$$

$$+ y\,\frac{a_1 b_1}{c_2} F_2^{(4)}(a_1+1, b_1+1, c_2+1) - x\,\frac{a_1 b_1}{c_1} F_2^{(4)}(a_1+1, b_1+1, c_1+1)$$

$$- z\,\frac{a_2 b_1}{c_3} F_2^{(4)}(a_2+1, b_1+1, c_3+1) - t\,\frac{a_2 b_1}{c_4} F_2^{(4)}(a_2+1, b_1+1, c_4+1)$$

$$+ x^2\,\frac{a_1 (a_1+1) b_1}{c_1 (c_1+1)} F_2^{(4)}(a_1+2, b_1+1, c_1+2)$$

$$+ z^2\,\frac{a_2 (a_2+1) b_1}{c_3 (c_3+1)} F_2^{(4)}(a_2+2, b_1+1, c_3+2)$$

$$+ t^2\,\frac{a_2 b_1 (a_2+1)}{c_4 (c_4+1)} F_2^{(4)}(a_2+2, b_1+1, c_4+2)$$

$$+ 2xz\,\frac{a_1 a_2 b_1}{c_1 c_3} F_2^{(4)}(a_1+1, a_2+1, b_1+1, c_1+1, c_3+1)$$

$$+ 2zt\,\frac{a_2 b_1 (a_2+1)}{c_3 c_4} F_2^{(4)}(a_2+2, b_1+1, c_3+1, c_4+1)$$

$$+ 2xt\,\frac{a_1 a_2 b_1}{c_1 c_4} F_2^{(4)}(a_1+1, a_2+1, b_1+1, c_1+1, c_4+1)$$

$$+ x\,\frac{(2b_1 - c_2 - 1) a_1}{c_1} F_2^{(4)}(a_1+1, b_1, c_1+1)$$

$$+ z\,\frac{(2b_1 - c_2 - 1) a_2}{c_3} F_2^{(4)}(a_2+1, b_1, c_3+1)$$

$$+ t\,\frac{(2b_1 - c_2 - 1) a_2}{c_4} F_2^{(4)}(a_2+1, b_1, c_4+1) \qquad (3.17)$$

$$(b_1 - c_3) F_2^{(4)} - z\, a_2 F_2^{(4)}(a_2+1) = (b_1 - c_3) F_2^{(4)}(b_1 - 1)$$

$$+ z\,\frac{a_2 b_1}{c_3} F_2^{(4)}(a_2+1, b_1+1, c_3+1) - x\,\frac{a_1 b_1}{c_1} F_2^{(4)}(a_1+1, b_1+1, c_1+1)$$

$$- y \frac{a_1 b_1}{c_2} F_2^{(4)} (a_1+1, b_1+1, c_2+1) - t \frac{a_2 b_1}{c_4} F_2^{(4)} (a_2+1, b_1+1, c_4+1)$$

$$+ x^2 \frac{a_1 b_1 (a_1+1)}{c_1 (c_1+1)} F_2^{(4)} (a_1+2, b_1+1, c_1+2)$$

$$+ y^2 \frac{a_1 (a_1+1) b_1}{c_2 (c_2+1)} F_2^{(4)} (a_1+2, b_1+1, c_2+2)$$

$$+ t^2 \frac{a_2 (a_2+1) b_1}{c_4 (c_4+1)} F_2^{(4)} (a_2+2, b_1+1, c_4+2)$$

$$+ 2xy \frac{a_1 b_1 (a_1+1)}{c_1 c_2} F_2^{(4)} (a_1+2, b_1+1, c_1+1, c_2+1)$$

$$+ 2yt \frac{a_1 a_2 b_1}{c_2 c_4} F_2^{(4)} (a_1+1, a_2+1, b_1+1, c_2+1, c_4+1)$$

$$+ 2xt \frac{a_1 a_2 b_1}{c_1 c_4} F_2^{(4)} (a_1+1, a_2+1, b_1+1, c_1+1, c_4+1)$$

$$+ x \frac{(2b_1 - c_3 - 1) a_1}{c_1} F_2^{(4)} (a_1+1, b_1, c_1+1)$$

$$+ y \frac{(2b_1 - c_3 - 1) a_1}{c_2} F_2^{(4)} (a_1+1, b_1, c_2+1)$$

$$+ t \frac{(2b_1 - c_3 - 1) a_2}{c_1} F_2^{(4)} (a_2+1, b_1, c_4+1) \qquad (3.18)$$

$$(b_1 - c_4) F_2^{(4)} - t a_2 F_2^{(4)} (a_2+1) = (b_1 - c_4) F_2^{(4)} (b_1 - 1)$$

$$+ t \frac{a_2 b_1}{c_4} F_2^{(4)} (a_2+1, b_1+1, c_4+1) - x \frac{a_1 b_1}{c_1} F_2^{(4)} (a_1+1, b_1+1, c_1+1)$$

$$- y \frac{a_1 b_1}{c_2} F_2^{(4)} (a_1+1, b_1+1, c_2+1) - z \frac{a_2 b_1}{c_3} F_2^{(4)} (a_2+1, b_1+1, c_3+1)$$

$$+ x^2 \frac{a_1 b_1 (a_1+1)}{c_1 (c_1+1)} F_2^{(4)} (a_1+2, b_1+1, c_1+2)$$

$$+ y^2 \frac{a_1 b_1 (a_1+1)}{c_2 (c_2+1)} F_2^{(4)} (a_1+2, b_1+1, c_2+2)$$

$$+ z^2 \frac{a_2 b_1 (a_2+1)}{c_3 (c_3+1)} F_2^{(4)} (a_2+2, b_1+1, c_3+2)$$

$$+ 2xy \frac{a_1 (a_1+1)}{c_1 c_2} F_2^{(4)} (a_1+2, b_1, c_1+1, c_2+1)$$

$$+ 2yz \frac{a_1 a_2}{c_2 c_3} F_2^{(4)} (a_1+1, a_2+1, b_1, c_2+1, c_3+1)$$

$$+ 2xz \frac{a_1 a_2}{c_3 c_1} F_2^{(4)} (a_1+1, a_2+1, b_1, c_1+1, c_3+1). \qquad (3.19)$$

§ 2 की इस विधि को अब अन्य चार चर फलनों से सम्बन्ध संलग्न फलन सम्बन्धों को प्राप्त करने में प्रयुक्त किया जा सकता है।

निर्देश

1. भट्ट आर० सी०, पी-एच डी० थीसिस 1965

2. श्रीवास्तव, एच० एम०, *Proc. of National Acad. of Sciences*, India, 1966 36 (A) II, 377-385.

3. शर्मा तथा परिहार जे०, *Indian Acad. Maths.* 1989 11, (2).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 1, January, 1997.

शारीरिक मानव विज्ञान : प्रकृति, क्षेत्र, शाखा एवं अन्य विज्ञानों से सम्बन्ध : एक समीक्षा

चतुर्भुज साहु

रीडर एवं अध्यक्ष, मानव विज्ञान विभाग,
गिरिडीह कॉलेज, गिरिडिह (बिहार)

[प्राप्त- नवम्बर 10, 1996]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन में शारीरिक मानव विज्ञान से सम्बन्धित सम्पन्न शोध कार्यों इसके वर्गीकरण एवं अन्य विज्ञानों से सम्बन्ध आदि पर विशेष प्रकाश डाला गया है।

अध्ययन के क्रम में यह पाया गया है कि शारीरिक मानव विज्ञान का इतिहास ईसा से पूर्व का है परन्तु इसका क्रमिक विकास 16वीं शताब्दी में एण्ड्रीज विशैलियस (1514-1564) के कार्यों से शुरू होता है। जॉन फ्रीडरीक ब्लेमेनबैच (1752-1840) जिन्हें शारीरिक मानव विज्ञान का जनक कहा जाता है, उन्होंने सर्वप्रथम प्रजाति वर्गीकरण के लिए माप-तौल की आधारों से परिचित कराया। 19वीं शताब्दी से शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में एक नया अध्याय प्रारम्भ हुआ तथा इस शताब्दी के अंतिम चरणों में यह विज्ञान एक विशेष दिशा की ओर अग्रसर हुआ।

भारत में शारीरिक मानव विज्ञान का अध्ययन मानवमिति से शुरू होता है। उसके बाद मानव के कंकाल, त्वचीय प्रतिरूप, रक्त-वर्ग आदि पर महत्वपूर्ण कार्य हुए। आधुनिक युग में शारीरिक मानव-विज्ञानी मानव आनुवंशिकी के मुख्य क्षेत्रों पर ध्यान केन्द्रित कर रहें हैं।

प्रस्तुत प्रपत्र में मानव की उत्पत्ति एवं विकास, विभिन्नता, वितरण आदि

की स्थितियों के आधार पर शारीरिक मानव विज्ञान को 14 भागों में बांटा गया है तथा इसका सम्बन्ध 13 विज्ञानों के साथ दर्शाया गया है।

Abstract

Physical Anthropology : Its nature & scope, major divisions and relation to other sciences, A Review *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih (Bihar).

Physical Anthropology is one of the main branches of anthropology. It has a long history and its study starts from the date of origin of man on the earth. It has been observed that the history of physical anthropology is existed from B. C. but its real development started from Andreas Vesalius's work (1514-1564) in 16th century. Johann Fridrich Blumenbach (1752-1840), father of Physical Anthropology, was the real founder of craniology.

In the 19th century some new attempts were made. Earlier half of this century in marked by the foundation of societies for the scientific study of man in several countries. With the publication of Charles Darwin's book "Origin of Species" (859) a revolution started in the line of thinking.

Indian Physical Anthropology has been developed principally on the basis of ethnological studies. Physical anthropology was considered nothing but anthropometry in the belief that with accurate metric values of all the problems could be solved. But now physical anthropology has got a broad based change because of its integrated background resulted from the application of genetic and other conspicuous biological principles.

An attempt has also been made to divide physical anthropology into 14 branches and relation to 13 allied disciplines.

शारीरिक मानव विज्ञान मानव विज्ञान की एक महत्वपूर्ण शाखा है, जो मानव के शारीरिक लक्षणों, जैविक तथा विभिन्नताओं को समझने का प्रयल करता है। इसके अन्तर्गत मानव की उत्पत्ति एवं विकास, अन्तर, विभिन्नताएँ, वितरण आदि से सम्बन्धित विस्तृत तथ्यों का अध्ययन किया जाता है। शारीरिक मानव विज्ञान में भिन्न-भिन्न गुफाओं तथा अन्य स्थानों पर आदि मानवों के अस्थिपंजर खोजे जाते हैं, उन्हें नापा-जोखा जाता है तथा यह अध्ययन किया जाता है कि आदि मानव कहाँ उत्पन्न हुआ, उसकी खोपड़ी कैसी थी और अस्थिपंजर कैसा था, मनुष्य का शरीर कब और कैसे बना, उसके

रक्त में कौन से तत्व हैं जो दूसरे प्राणियों में नहीं हैं, कौन से शारीरिक गुण संतति में संक्रान्त है और कौन से नहीं, पर्यावरण का मनुष्य की शारीरिक भिन्नताओं पर क्या प्रभाव पड़ता है, एक ही रक्त के लोगों के पारस्परिक सम्बन्ध से प्रजातियों में क्या अन्तर आता है, प्रजाति भेद क्या है, भिन्न-भिन्न प्रजातियों के सम्मिश्रण से उनमें कौन-कौन शारीरिक तथा मानसिक अन्तर आ जाते हैं आदि-आदि। अर्थात् शारीरिक मानव विज्ञान में मानव के शारीरिक लक्षणों का वैज्ञानिक दृष्टिकोण से अध्ययन किया जाता है। इसलिए शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने आधुनिक खोजों के आधार पर इस विषय को विभिन्न क्षेत्रों में ला दिया है और आज मानव की उत्पत्ति एवं विकास के अलावा शारीरिक अंग-उपांगों में परिवर्धन और परिष्कार, मानव के पूर्वज, वर्तमान मानव प्रजाति की स्वास्थ्य समस्याएं, प्रजातीय भेद तथा उनके आधार, मानवीय वंशागति, उसके नियम, वातावरण का प्रभाव, हानिकारक गुणों का भावी संतानों पर प्रभाव, गुणों का प्रजनन तथा उपयोगिता, उपेक्षित गुणों से बचने के उपाय, अपराधियों को पहचानने के लिए त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन आदि-आदि पहलुओं पर कार्य हो रहे हैं (साहु[1]) इस पृष्ठभूमि में मानव समूहों का अध्ययन शारीरिक मानव विज्ञान की अपनी विशेषता है तथा इसका क्षेत्र, शाखा एवं अन्य विज्ञानों से सम्बन्ध बुहत ही व्यापक है।

मानव शास्त्र को विज्ञान का रूप देने वाला अध्ययन शारीरिक मानव विज्ञान है। इसके अन्तर्गत प्राचीन मानव की उत्पत्ति एवं विकास का अध्ययन प्राप्त प्रस्तरित हड्डियों के आधार पर किया जाता है। प्राप्त प्रस्तरित हड्डियों का अध्ययन करने से यह विदित होता है कि ये किस युग की हैं। युग और काल का निर्धारण होने के बाद यह ज्ञात किया जाता है कि मनुष्य कितना प्राचीन है, उससे मिलते-जुलते अन्य प्राणी कौन-कौन से हैं, बन्दर तथा मनुष्य की खोपड़ी में कौन-कौन सी समानताएँ व असमनताएँ हैं। इसी प्रकार अन्य हड्डियों की तुलना की जाती है। प्राणि-जगत में मानव का स्थान निर्धारित करना शारीरिक मानव विज्ञान का मुख्य क्षेत्र है।

शारीरिक मानव विज्ञान का क्षेत्र

मानव की विभिन्ननताओं का विश्लेषण शुरू से ही शारीरिक मानव विज्ञान की विषय-वस्तु रहा है। इस दिशा में मानवमितीय अध्ययन का योगदान महत्वपूर्ण है। परन्तु आज के युग में आनुवंशिकीय खोजों ने शारीरिक मानव-विज्ञान के क्षेत्र में एक नया अध्याय जोड़ा है। इसके अन्तर्गत किये जाने वाले अध्ययनों ने मानव स्वीसींज की उत्पत्ति एवं विकास तथा उसकी विभिन्नता के लिए विश्वसनीय इतिहास की रूप-रेखा ही है और मानव विभिन्नता के कारणों को समझाने का प्रयास किया है।

मानव जब से प्राणि-जगत के एक प्राणी के रूप में आया है तब से प्राइमेट्स के अन्तर्गत आने वाले जीवों का अध्ययन शारीरिक मानव विज्ञान का एक महत्वपूर्ण क्षेत्र बन गया है। इसका अध्ययन करने के लिए शारीरिक मानव विज्ञान के अन्तर्गत एक पृथक शाखा ही स्थापित की गई है जिसे प्राइमेटोलॉजी कहते हैं। इसी के समरूप अध्ययन करने वाला एक अन्य विज्ञान है जिसे प्राइमेट पुरातत्व विज्ञान कहते हैं। इसके अन्तर्गत विलुप्त हो रहे उन तमाम जीवों का अध्ययन किया जाता है जो आज के जीवित जीवों के पूर्वज रहे होगें। इसके लिए यह आवश्यक हो जाता है कि आदिकालीन जलवायु

परिवर्तनों तथा प्राइमेट्स की परिस्थिति जलवायु परिवर्तन का प्रभाव का समुचित ज्ञान हो। अतः इसके अन्तर्गत भूगर्भीय परिस्थिति का भी अध्ययन होता है। शारीरिक मानव वैज्ञानिक मानव की उत्पत्ति और विकास तथा उनकी विभिन्नताओं से सम्बन्धित तथ्यों का अध्ययन पौलियो एन्थ्रोपोलॉजी के अन्तर्गत करता है। इसके लिए मानव के प्रस्तरित अवशेषों की खोज की जाती है। मानव विभिन्नताओं का अध्ययन **प्रजाति विज्ञान** (Raciology) के अन्तर्गत किया जाता है। परन्तु आज के संदर्भ में प्रजाति शब्द विशुद्ध नहीं रह गया इसलिए एसलेय मौन्टेगु[2] एवं डोब्जहेंस्की[3] ने क्रमशः इसे 'इथनिक ग्रुप' और 'पापुलेशन' नाम से सम्बोधित करने का सुझाव दिया है।

मानव आनुवंशिकी में भी अन्तर आया है। एक ओर विभिन्न शारीरिक लक्षणों का हस्तांतरण की पद्धति का अध्ययन किया जाता है तो दूसरी ओर इन शारीरिक लक्षणों का वास्तविक वितरण तथा जीन-आवृत्ति पर विशेष बल दिया जा रहा है। शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में यह अध्ययन अपनी किस्म का है क्योंकि अन्य किसी भी विज्ञान में इस तरह का अध्ययन नहीं किया जाता है। मानव समाज में विवाह की पद्धति बहुत ही महत्वपूर्ण है क्योंकि यह पद्धति एक निश्चित समूह में जीन के बहाव को नियंत्रित करती है। इस तरह का अध्ययन मानव जनसंख्या आनुवंशिकी के अन्तर्गत किया जाता है। इस क्षेत्र में सिरोलॉजी और त्वचीय प्रतिरूप का अध्ययन नवीन खोज है। शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र को दृढ़ाधार देने में सुजननिकी (Eugenics) की अहम् भूमिका है।

इन क्षेत्रों के अलावा शारीरिक मानव विज्ञान दंत विज्ञान, चिकित्सा विज्ञान, फोरेंसिक विज्ञान, क्रीड़ा मानव विज्ञान तथा प्रौद्योगिकीय अध्ययनों में भी महत्वपूर्ण योगदान दे रहा है। फोरेंसिक विज्ञान को एक निश्चित दिशा देने में शारीरिक मानव विज्ञान के अस्थिविज्ञान अस्थिमिति, त्वचीय प्रतिरूप, रक्त वर्ग, आनुवंशिकीय लक्षण आदि क्षेत्रों का ही समग्र योगदान है।

शारीरिक मानव विज्ञान से सम्बन्धित कार्यों का अवलोकन

शारीरिक मानव विज्ञान का इतिहास मानव की उत्पत्ति और विकास तथा उसके विभिन्नीकरण के ज्ञान की जिज्ञासा का इतिहास है। अरस्तू के समय से ही मानव विज्ञान स्वयं मानवों के द्वारा उठाये गये प्रश्नों को हल करने में लगा हुआ है जिसमें शारीरिक मानव विज्ञान विशिष्ट सिद्धांतों के द्वारा विभिन्न आयामों की चर्चा है। इस प्रकार शारीरिक मानव विज्ञान का इतिहास ईसा से पूर्व ही पाया गया है जिसमें हेसेडोटस (484-425 BC) के कार्य उल्लेखनीय हैं। इन्होंने लिबिया, इजिप्ट, ग्रीक, एशिया माइनर, इथोपिया एवं साइथिया के निवासियों के महत्वपूर्ण तथ्यों का उल्लेख किया है।

हिप्पोक्रेट्स (460-377 BC) को शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में मार्गदर्शक के रूप में जाना जाता है। इनके अनेक ग्रन्थों में से दो ग्रन्थ— "डी नेचुरा होमोनिस एवं डी एरे एक्वीस एह लोसीज" मानव विज्ञान से सम्बन्धित हैं। उनका विश्वास था कि मानव के शारीरिक लक्षणों में वातावरण का प्रभाव पड़ता है और ग्रहण किये गये लक्षण पीढ़ी-दर-पीढ़ी हस्तांतरित होते हैं।

अरस्तू (384-322 BC) को मानव विज्ञान शब्द का व्यवहार करने वाला पहला व्यक्ति ही नहीं

समझना चाहिए बल्कि उन्हें एक मानव वैज्ञानिक के रूप में जानना चाहिए, क्योंकि इनका कार्य आनुवंशिकी, विकास, बालकों की शारीरिक बनावट, शरीर में बालों का वितरण, खोपड़ी तथा खोपड़ी का जोड़ आदि मानव वैज्ञानिक तथ्यों के लिए खजाना है। गैलेन (131-200 AD) ने रोम से मानव विज्ञान के इतिहास को बताया।

शारीरिक मानव विज्ञान का क्रमिक विकास 16 वीं शताब्दी में एन्ड्रीज विशैलियस (1514-1564) के कार्यों से शुरू होता है। इन्होंने गैलेन के कार्यों को दुहराने पर बल दिया। इनके लेख आधुनिक **शरीर गठन विज्ञान** (anatomy) की नीव हैं तथा प्रजातीय खोपड़ियों से सम्बन्धित हैं। वोल्यर कोयटर (1534-1600) ने भ्रूण और बच्चे का अध्ययन किया।

17 वीं शताब्दी में जॉन स्पर्लिंग तथा समुएल हवोर्थ के कार्य सराहनीय हैं। जॉन स्पर्लिंग (1668) ने शारीरिक मानव विज्ञान पर तथा हवोर्थ (1680) ने एन्थ्रोपोलॉजिया पर शोध-पत्र लिखा। एडवार्ड टामसम-फेलो ऑफ द कॉलेज ऑफ फिजिशियन तथा फेलो ऑफ द रॉयल सोसायटी-ने 1699 में अपना शोध ग्रंथ प्रस्तुत किया जो वनमानुष के शरीर गठन विज्ञान का प्रथम विश्लेषणात्मक अध्ययन था।

18 वीं शताब्दी में कुछ विशेष कार्य हुए जिनमें स्वीडेन निवासी कैरोलस लिनियस (Carolus Linnaeus, 1707-1778) द्वारा प्रस्तुत प्राणियों का वैज्ञानिक वर्गीकरण मुख्य है। इसी कारण लिनियस को वर्गीकरण विज्ञान का जनक कहा जाता है। प्राणियों के वर्गीकरण में मानव से मिलते-जुलते प्राणियों को जिस वर्ग में रखा गया। उसका नाम प्राइमेट्स रखा। लिनियस के बाद से ही मनुष्य वैज्ञानिक रूप से होमोसेपियेन्स के नाम से जाना जाता है।

फ्रांसिसी वैज्ञानिक व्यूफॉन (1707-1780)- ने मानव विज्ञान के विषय में मूल विचार दिये। इनका शोध कार्य 'हिस्टोरिक नेचुरले' में प्रकाशित हुआ जो 44 खण्डों में पूर्ण हुआ है। इन्होंने मानव तथा अन्य प्राणियों के शारीरिक लक्षणों का चित्रण किया है जो लिनियस से भी ज्यदा स्पष्ट है। इन्होंने अपनी पुस्तक 'वेराइटीज हूमेनीस' में बाल, कद, रंग आदि शारीरिक लक्षणों का वर्णन किया है और स्पष्ट किया है कि व्यक्तियों की विभिन्नताओं के लिए जलवायु, वातावरण, भोजन एवं आदत महत्वपूर्ण हैं।

विकासवादियों की दिशा में इरासमस डार्विन (1731-1802) जो चार्ल्स डार्विन के दादा थे का भी नाम उल्लेखनीय है।

जीन वैप्टिस्टे डी लेमार्क (1744-1829) ऐसे प्रथम वैज्ञानिक थे जिन्होंने यह बताया कि मानव का अवरोहण वनमानुषों से हुआ है। 1809 में प्रकाशित 'फिलोसोफी जूलोजीक (Philosophic Zoologique) में इन्होंने विकासवादी सोंच को एक नई दिशा दी और पुराने विचारों को गलत कहा है। लेमार्क उस सिद्धांत के लिए सदा ही याद किये जायेंगे जो लक्षण किसी व्यक्ति के जीवन में विकसित होते हैं वे आने-वाले पीढ़ियों में हस्तान्तरित होते हैं अर्थात् उपार्जित लक्षण वंशागत होते हैं और इसी कारण अनेक पीढ़ियों के बाद की संतानें अपने पूर्वजों से इतनी भिन्न हो जाती हैं कि वे नवीन जाति

की होती हैं। लेमार्क के इस सिद्धान्त के आलोचकों में कुवीयर (1769-1832) हैं परन्तु इसके समर्थकों में फ्रांस के ई० जीयोफरी सेंट हिलेरी (1772-1832) तथा जर्मनी के गोंठ मुख्य हैं।

जॉन फ्रीडरिक ब्लुमेन बैच (1752-1840) शारीरिक मानव के जनक हैं तथा खोपड़ी विज्ञान (Craniology) के वास्तविक स्थापक भी हैं। अपने शोध कार्यों के क्रम में इन्होंने मानव विभिन्नताओं को उजागर करने की कोशिश की। इन्होंने मानव समूहों को 5 वर्गों में विभाजित किया— कॉकेशियन, मंगोलियन, इथोवियन, अमेरिकन एवं मलया। यही पहला व्यक्ति है जिसने प्रजाति वर्गीकरण के लिए माप-तौल के आधारों से परिचित करवाया।

एण्डर्स रेटजस (1796-1960) ने कपाल देशणा (Cranial Index) निर्धारित करने की विधि बतायी तथा यही खोपड़ी को लम्बे आकार तथा चौड़े आकार में बाँटा। इनके द्वारा प्रतिपादित की गई खोपड़ी के मापने की विधि को सबों ने स्वीकारा। जे० सी० प्रीचार्ड (1786-1848) ने 'रीर्सचेज इन टू द फीजिकल हिस्ट्री ऑफ मैन' (1848) में मानव समूह के प्रजातीय तत्वों से सम्बन्धित क्रमबद्ध तथ्यों को दर्शाया।

थामस एच० हक्सले (1825-1895) पहला व्यक्ति है जिसने डार्विन के सिद्धांतों को मानव के अध्ययन के लिए प्रयुक्त किया। इनके कार्य 'मैन्स प्लेस इन नेचर' (1863) नामक पुस्तक में प्रकाशित हुए। इन्होंने प्रजातीय वर्गीकरण के लिए खोपड़ी मापने की एक नई विधि प्रतिपादित की और मानव समूह को 5 मुख्य प्रजातियों में बांटा जिन्हे पुनः 14 उपवर्गों में विभक्त किया गया। इनके कार्यों को थोड़ा-बहुत संशोधित करते हुए हैकेल, मुलर (1879) टोपीनार्ड (1885) एवं क्वाटरीफैगेज (1889) ने अनुशंसित किया। जर्मन के रूडाल्फ वीरचो (1821-1902) ने शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में नये-नये कार्य किये। पेरिस में पाल ब्रोका (1824-1880) मानव वैज्ञानिक अध्ययनों पर नींव डालने वाले पहले व्यक्ति थे। इन्होंने कपाल को मापने के लिए प्रयोग में लाये जाने वाले उपकरणों की जानकारी दी जिससे खोपड़ी के अध्ययन में त्रुटि न हो। ब्रोका की विधि में कुछ संशोधन करते हुए फॉउलर और टरनर ने इसे इंगलैण्ड में उपयोग किया।

स्वीडिश मानव वैज्ञानिक एन्ड्र रेटजेस (1842) ने खोपड़ी की लम्बाई एवं चौड़ाई के बीच सम्बन्ध स्थापित किया और कपाल देशणा निकाला। इस अवधि में **खोपड़ीमिति** से सम्बन्धित अनेक कार्य हुए जिनमें ए० एकर (1865), डब्ल्यू हीस और एल० लूटिमेयर (1864) क्वाटरीफैजेज और ई० टी० हेमी (1873) आदि के कार्य महत्वपूर्ण हैं।

1882 में जर्मन मानव वैज्ञानिकों का एक सम्मेलन फ्रेंकफोर्ट में हुआ जिसमें ब्रोका के द्वारा प्रतिपादित खोपड़ी मापने की विधि को कुछ संशोधनों के बाद स्वीकारा गया।

पाल टोपीनार्ड 1876 में 'एल' एन्थ्रोपोलॉजी का प्रकाशन प्रारम्भ कर शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में महत्वपूर्ण बना। आरमंड डी क्वाट्रीफेजेज (1810-1892) 'पेरिस म्युजियम ऑफ नेचुरल हिस्ट्री' में मानव विज्ञान के प्रोफेसर थे। इन्होंने शारीरिक मानव विज्ञान के विकास में नवीन सिद्धांतों तथा

विचारों को प्रस्तुत किया। जोसफ डेनिकर ने (1880) में यह बतलाया कि कोई एक लक्षण प्रजातीय वर्गीकरण के लिए विश्वसनीय नहीं हो सकता और इन्होंने 29 प्रजातीय तत्वों की चर्चा की।

शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में 1900 ई० से एक नया अध्याय प्रारम्भ होता है क्योंकि इसी वर्ष मेंडल (आनुवंशिकी का जनक) के वंशागति नियम को हॉलैण्ड के हूगो डी ब्रीज, आस्ट्रिया के शरमैक तथा जर्मन के कौरेन्स ने इनके प्रयोगों को दुहराया और उन्हें ठीक पाया। इसके बाद आनुवंशिकी की ओर लोगों का विशेष ध्यान गया जिनमें डब्ल्यू० ई० केस्टल—जेनेटिक्स एण्ड यूजेनिक्स (1916), एफ० ए० ई० क्रेव— ऑरगेनिक इनहेरिटेन्स इन मैन (1927), आर० पीरल— स्टडीज इन ह्यूमेन वायलॉजी (1925) के० पीयरसन—द ट्रेजरी ह्यूमेन इनहेरिटेन्स, आर० आर० गेट— मेंडेलियन हेरेडिटी एण्ड रेसियल क्रोसिंग (1926) एवं हेरेडिटी इन मैन (1929) आदि वैज्ञानिकों के कार्य काफी महत्वपूर्ण हैं। आर० ए० फिशर ने अपनी पुस्तक 'ए जेनेटिकल थ्योरी ऑफ नेचुरल सेलेक्शन' (1930) में मानव और समाज को आनुवंशिकीय दृष्टिकोण से समझाया।

19वीं शताब्दी के अंतिम चरणों में शारीरिक मानव विज्ञान एक विशेष दिशा की ओर अग्रसर हो चला था। इस समय तक विभिन्न मानव समूहों में रूप, रंग, गठन आदि के वर्णन प्रचुर मात्रा में मिलते हैं जिसके कारण विभिन्न शाखाओं के वैज्ञानिकों का ध्यान आकृष्ट हुआ तथा पूर्व में हुए अध्ययनों को एक सुगठित विषय के रूप में देखा जाने लगा जिससे इसे एक नई दिशा मिली।

मानव के रक्त-वर्ग के अध्ययनों ने मानव वैज्ञानिक तथ्यों के विश्लेषण को नई दिशा दी। 1900 ई० में कार्ल लैण्ड स्टीनर ने खोज के दौरान पाया कि एक ही जाति के व्यक्तियों के रुधिर में भेद होता है। उन्होंने रुधिर के तीन भेद किये जिन्हें A, B तथा O नाम दिया। दो वर्ष बाद स्टरली तथा डेकैस्डेलो ने रुधिर के एक चौथे प्रकार AB की खोज की। इस प्रकार मनुष्य में रुधिर के चार मुख्य वर्ग होते हैं तथा प्रत्येक मनुष्य इन्हीं चार में से किसी न किसी एक वर्ग के अन्तर्गत आता है। रक्त समूह की खोजों ने रोग निवारण के लिए नई दिशा प्रदान की तथा मानव में जेनेटिक पोलीमॉरर्फिज्म की जैवीय महत्ता की खोज के लिए रक्त समूह एवं रोगों के बीच सम्बन्ध की ओर विशेष ध्यान दिया गया। अनेक शोधकर्ताओं ने रक्त-समूह एवं रोगों के बीच सम्भावित सम्बन्धों को प्रकाशित किया।

रक्त-वर्ग का अध्ययन जीनी विभेदों के लिए अति महत्वपूर्ण है तथा रक्त-समूह का ज्ञान अन्य सभी प्रविधियों से सबसे अधिक भी है। बाइनर के अनुसार कॉकेशियाई समूह के अन्तर्गत ABO रक्त-समूह में अधिकांश A अथवा O होता है। मौरेन्ट के अनुसार भारत तथा अन्य देशों में रक्त-वर्ग B का वितरण सर्वाधिक है। ब्रुश, ब्युलर या नुस ने पाया है कि A तथा B जीनों का वरण वातावरण से प्रभावित होता है।

इस अवधि में पुरातन विज्ञान से सम्बन्धित उल्लेखनीय कार्य हुए जिनमें एम० बॉयले (लेस होम्मस फोसिल्स, 1923) एम० सी० वर्किट (दी ओल्ड स्टोन एज, 1933) सर आर्थर कीथ (दी एन्टीक्वीटी ऑफ मैन, 1925 एवं न्यु डिस्कभरीज रिलेटिंग टु दी एन्टीक्वीटी ऑफ मैन, 1931) एम० एफ० ऑसवॉर्न (मेन ऑफ दी ओल्ड स्टोन एज, 1918), सर जी० इलियोट स्मीथ (द सर्च फोर मेन्स

एन्सेस्टर्स, 1931) एवं जी० मैककर्डी (ह्यूमेन ओरिजिन, 1924) मुख्य हैं। इसके अलावा अबे ब्रेयुल, पेंक एवं ब्रुकनर, रूटॉट एवं कमौन्ट वीगर्स आदि के कार्य पुरातात्विक खोजों से सम्बन्धित हैं। इलियोट स्मिथ ने जावा, पेकिंग और पिल्टडाउन मानवों का विकासवादीय क्रम के रूप में अध्ययन किया और मानव के उत्पत्ति स्थान एवं आदि मानवों और कपियों के धुमंतू जीवन का अध्ययन किया। डब्ल्यू० के० ग्रेगरी ने कहा कि बनमानुष और मनुष्य का विकास सामान्य पूर्वज ड्रायोपिथिकस से हुआ है।

1908 ई० के बाद नियेनडरथल मानव पर खोज करने वालों में हाउजर एवं मोरेन्ट मुख्य हैं। मोरेन्ट ने उच्च पूर्ण पाषाण काल में प्राप्त सभी प्रागैतिहासिक मानवों का अध्ययन किया।

इस प्रकार शारीरिक मानव विज्ञान से सम्बन्धित खोजों में वैज्ञानिकों ने काफी रुचि ली। इनमें टरनर और वरमीकोट (ह्यूमेन, वायलॉजी 1964), एसले मोंटेगु (एन इट्रोडक्शन ऑफ, फिजिकल एन्थ्रोपोलॉजी, 1960), हुटन (अप फ्रोम दी एप, 1946), हॉवेल्स (मैनकाइन्ड इन द मेकिंग, 1959), बरनेट (द ह्यूमेन स्पेसिज, 1957) एवं कोमस (मेनुवल ऑफ फिजिकल एन्थ्रोपोलॉजी, 1960) आदि के कार्य महत्वपूर्ण हैं।

ले ग्रॉस क्लार्क (हिस्ट्री ऑफ प्राइमेट्स, 1949 एवं दी एन्टेसेडेंट ऑफ मैन, 1960), जे० जेड़ यंग (लाइफ ऑफ भरटिब्रेट, 1950) वुड जॉन्स (हालमार्क्स ऑफ मैनकाइन्ड, 1948), शुल्ट्ज (पोस्ट एम्ब्रीयोनिक एज चेंजेज, 1956) आदि के कार्य प्राइमेट्स वर्ग के अन्तर्गत आने वाले जीवों के बीच आपसी सम्बन्धों को दर्शाते हैं।

1924 में अफ्रीका के बेचुआना लैण्ड के टांग्स नामक स्थान पर एक गुफा में एक बाल प्राणी की खोपड़ी पायी गई। जिसे प्रो० रेमन्ड डार्ट ने साफ करवाया और 1925 में इस पर पहली रिपोर्ट (एडबेंचर विथ द मिसिंग लिंक) प्रकाशित की। इस रिपोर्ट ने सारे वैज्ञानिकों को आश्चर्यचकित कर दिया। इन्होंने इस बाल प्राणी का सम्बन्ध मनुष्य से स्थापित किया किन्तु मानव वैज्ञानिकों ने इसे अस्वीकार कर दिया। डॉ० रॉवर्ट ब्रूम ने 1938 में ट्रांसवाल (अफ्रीका) से पूर्ण युवा की कुछ अस्थियाँ प्राप्त कीं जो आस्ट्रेलोपिथेकस अफ्रीकैन्स से मिलती-जुलती थीं। इन्होंने डार्ट के मत की ही पुष्टि की लेकिन इस मत को भी स्वीकार नहीं किया गया।

1960 से 1970 के बीच प्राइमेट्स फाइलोजिनी से सम्बन्धित कार्य हुए जिनमें एम० कार्टमिल (1974), इरिक डेल्सन (1969) के कार्य महत्वपूर्ण हैं। इस अवधि में प्राइमेट्स ब्रेन, एनाटोमी, बुद्धि, व्यवहार आदि से सम्बन्धित अनेक कार्य हुए।

प्लाइस्टोसिन युग की प्रस्तरित हड्डियों के अध्ययन के क्रम में सबसे पहला स्थान जेयुनर का आता है। इन्होंने अपनी प्रसिद्ध पुस्तक 'डेटिंग द पास्ट (1946 एवं 1952)' में तिथि निर्धारण सम्बन्धी विचार व्यक्त किये हैं। ओकले (1962) के द्वारा प्रतिपादित फ्लोरिन जाँच तथा C^{14} (कार्बन 14) जाँच प्रस्तरितों के विधि निर्धारण की सबसे महत्वपूर्ण विधियाँ हैं।

युगेन डुबॉय (1935) में सर्वप्रथम यह विश्वास किया कि पिथेकेन्थ्रोपस वास्तविक रूप में होमिनिड

समूह का जीव था किन्तु बाद में उन्होंने अपना विचार बदल दिया और कहा कि पिथेकेन्थ्रोपस कुछ भी नहीं बल्कि एक 'जोइगेन्टिक एप' था तथा गिब्बन समूह से सम्बन्धित था। वॉन कोनिग्सवाल्ड (1947) तथा अन्य वैज्ञानिकों ने बाद के पिथेकेन्थ्रोपस के अवशेषों के आधार पर इसे होमिनिड ही माना।

वैलोइस (1958), ले ग्रास क्लार्क (1955), होवेल्स (1959) आदि ने होमोसेपियेन्स के प्राचीन रूपों का वर्णन किया। नियेनडरथल मानव से सम्बन्धित कार्य करने वालों में मैककॉन और कीथ (1939), वेल्स (1947) आदि मुख्य हैं।

मानव विकास से सम्बन्धित तथ्यों को उजागर करने वालों में जुलियन हक्सले (इभोलुशनः द मोर्डन सिन्थोसिस, 1942), रेंच (इभोलुशन : द स्पेसिज लेभेल, 1960), आदि के कार्य काफी महत्वपूर्ण हैं। सिम्पसन (1949 एवं 1950) ने नव-डार्विन वाद का समर्थन किया और कहा कि फाइलोजिनेटिक परिवर्तन आकस्मिक परिवर्तनों के कारण होता है जिसका प्रभाव विकास एवं वृद्धि पर पड़ता है। फिशर (1930) एवं हाल्डेन (1935, 1942, 1947) के कार्यों का उपयोग जीन के वितरण में किया जा रहा है। माउरेन्ट (द डिस्ट्रीब्युशन ऑफ ह्यूमेन ब्लड ग्रुप्स, 1954), माउरेन्ट एवं अन्य ने विश्व में रक्त-वर्ग वितरण से सम्बन्धित नक्शा बनाया। विलियम (1963) ने बतलाया कि प्राकृतिक चयन मानव जनसंख्या एवं रोग के बीच रक्त-समूह की बारम्बारता को बनाये रखने में कार्यरत है। एफ० एच० वोगेल तथा डब्ल्यू० हेमबोल्ड (1960), एम० आर० चक्रवर्ती तथा एफ० एच० वोगेल (1967) ने सुझाव दिया कि मानव जनसंख्या में ABO रक्त समूह के वितरण को चयन के द्वारा वर्णित किया जा सकता है जो प्लेग, चेचक और सिफिसिस जैसी महामारी के द्वारा विकसित होता है। जे० ए० बुचमैन और ई० टी० हिगली (1921) ने मायोक्लिनिक के अध्ययन से निष्कर्ष निकाला कि O ग्रुप और पेप्टिक अल्सर तथा A और परनिसियस एनीमिया के बीच सम्बन्ध है। ब्रुश (1954) ने ABO रक्त-वर्ग में चयन एवं पोलिमोरफिज्म से सम्बन्धित कार्य किया और अपने एक अन्य लेख (1963) में ABO रक्त-वर्ग पर चयन का स्टोकेस्टिक जाँच पर चर्चा की। कोहेन (1970) ने ABO रक्त वर्ग एवं Rh इन्कम्पेटिबिलिटी पर कार्य किया। रेस एवं सैन्गर (1975) ने अपने पूर्व के अध्ययनों को सुधारते हुए रक्त सम्बन्धी अध्ययनों पर नई दिशा दी।

रक्त-वर्ग जीन एवं उनके व्यवहार पद्धतियों की खोजों ने प्रजाति एवं प्रजाति विभेद से सम्बन्धित अध्ययनों में महत्वपूर्ण योगदान दिया। इस प्रकार शारीरिक मानव वैज्ञानिक प्रजाति से सम्बन्धित समस्याओं का अध्ययन दूसरे ही दृष्टिकोणों से करने लगे जिनमें हक्सले एवं हैड्न (वी यूरोपियन, 1935), डाल्हवर्ग (रेस, रीजन एण्ड रविस, 1942), असले-मोन्टेगु (मेन्स मोस्ट डेंजरस मीथ, 1945), वाशवर्न (द रेमेस ऑफ यूरोप (1945), ब्यॉड (जेनेटिक्स एण्ड द रेसेस ऑफ मैन, 1950), मुख्य है। ब्यॉड ने पुराने अध्ययनों की कमियों को उजागर किया है।

प्रजाति से सम्बन्धित प्रो० गार्न (1960) के कार्य काफी महत्वपूर्ण हैं क्योंकि इनका अध्ययन पूर्णतः आनुवंशिकीय सिद्धांतों पर आधारित हैं। गार्न की सम्पादित पुस्तक (रीडिंग्स ऑन रेस, 1968) प्रजाति की अवधारणा से सम्बन्धित उल्लेखनीय सूचना है। व्युलर-यानुश (1969), स्टेन और रॉबे (1974),

डेविड एवं फ्लेहर्टी (1976), बोडमार (1977) और ब्रुश (1977) के कार्य विश्व के शारीरिक मानव वैज्ञानिकों द्वारा स्वीकृत है।

वर्तमान समय में एस्लेमान्टेगु (1946) ने महिलाओं की प्रजनन परिपक्वता पर कार्य किया है। मिल्स (1950) ने तर्क दिया है कि ट्रोपिक लोगों में मासिक धर्म देर से शुरू होती है। इलिस (1950) ने नाइजेरियन लड़कियों पर अध्ययन करने के बाद मिल्स के समान ही तथ्य प्राप्त किया।

शारीरिक मानव वैज्ञानिक के कार्यों में मानव वितरण एवं अनुकूलन से सम्बन्धित कार्य भी काफी महत्वपूर्ण हैं। थोमसन ने सुझाव दिया कि नाक का आकार अनुकूलित महत्ता पर आधारित है जिसे डेविस (1932) एवं वीनर (1954) ने समर्थन किया। कुन, गार्न एवं वर्डसेल ने अपनी पुस्तक 'रेसेज, ए स्टडी ऑफ द प्रोब्लम ऑफ रेस फॉरमेशन इन मैन' (1950) में कुछ लक्षणों जैसे एस्किमों के चेहरे एवं शारीरिक लक्षणों आदि के अनुकूलित मानो से सम्बन्धित साक्ष्य प्रस्तुत किये। इन लोगों ने ठंडे और मरुस्थलीय प्रदेशों में आँख के आकार की महत्ता पर अध्ययन किया। फ्लेव (1945) ने बताया है कि चमड़े का पिगमेन्टेशन और सूर्य की पराबैंगनी किरणों का भौगोलिक सम्बन्ध है। इन्हीं सम्बन्धों के कारण चमड़े के रंग में अनुकूलित महत्ता प्रदर्शित होती है।

1970 के दशक में मानव अनुकूलित से सम्बन्धित कार्यों में प्रगति देखा गया है। ग्रीने (1977) ने अपनी पुस्तक मालन्युट्रिशन, वीहैभीयर एण्ड सोसल ऑरगेनाइजेशन में जैविक और सांस्कृतिक अनुकूलन के मूलभूत तथ्यों को उजागर किया है। गेरे एवं हैरिसन (1977) ने न्युट्रिशनल मानव विज्ञान और जैविक अनुकूलन पर कार्य किया है। रॉवर्ट (1978) ने वायवीय शर्तों के आधार पर मानव विभिन्नताएँ पर कार्य किया है। हामा और डेनियल (1979) ने मानव की तापीय सहनशीलता और इसके जैविक तथा सांस्कृतिक अनुकूलन से सम्बन्धित विभिन्न लक्षणों को दर्शाया है। बेकर (1978) ने अपनी सम्पादित पुस्तक में अत्यधिक ऊँचाई में रहने वाले लोगों का जैविक अध्ययन किया और इसके लिए उपयुक्त उदाहरण प्रस्तुत किये। जेरोम, कान्डेल एवं पेल्टो (1980) ने सम्पादित पुस्तक 'न्युट्रिशनल एन्थ्रोपोलॉजी कन्टेम्पोरेरी एप्रोचेज टु डाइट एण्ड कल्चर' में लोगों के जैविक और सांस्कृतिक स्तरों में अनुकूलन के अनेक लक्षणों को दर्शाया है। बीस और मान ने 'ह्यूमेन वायलॉजी एण्ड वीहैभीयर' (1981) में मानव अनुकूलनों का बहुत ही उपयोगी तथ्य दर्शाया है।

फोरेंसिक मानव विज्ञान की शुरूआत प्रशिक्षित मानव वैज्ञानिक डब्ल्यू एम० क्रोगमैन (1939) के कार्यों से हुई क्योंकि इन्होंने ही सर्वप्रथम इस शाखा से सम्बन्धित लेख 'गाइड टु द आइडेन्टीफिकेशन ऑफ ह्यूमेन स्केलेटल मेटेरियल' लिखा। इस कार्य के पूर्व दो ख्याति प्राप्त मानव वैज्ञानिकों— ए० हार्डलिका और ई० पी० हुटन ने प्राप्त अस्थियों को पहचानने का कार्य किया, परन्तु क्रोगमैन का कार्य काफी महत्वपूर्ण था। द्वितीय विश्व युद्ध के बाद युद्ध में मरे व्यक्तियों को पहचानने की आवश्यकता पड़ी और इसके लिए शारीरिक मानव वैज्ञानिकों की जरूरत लगातार बढ़ती गयी। अमेरिकन युद्ध में मरे व्यक्तियों को पहचानने के लिए 1947 ई० में हवाई में एक केन्द्रीय पहचान प्रयोगशाला की स्थापना की गई। केन्चुकी विश्वविद्यालय के डॉ० सी० सी० स्नो मुख्य शारीरिक मानव वैज्ञानिक बने। 1948 में 'अमेरिकन एशोसियेशन ऑफ फिजिकल एन्थ्रोपोलाजिस्ट्स' के तत्वाधान में एक संगोष्ठी हुई जिसमें

टी० डी० स्टीवार्ट, डब्ल्यू० एम० क्रोगमैन, एच० एल० शैपिरो एवं सी० सी० स्नो ने मेडिको लिगल से सम्बन्धित शोधपत्र प्रस्तुत किये। इस संगोष्ठी के बाद फोरेंसिक मानव विज्ञान से सम्बन्धित कई कार्य हुए और पुस्तकें लिखी गई। क्रोगमैन ने सर्वप्रथम फोरेंसिक मानव विज्ञान पर पाठ्यपुस्तक लिखी जिसका नाम 'द ह्यूमेन स्केलेटन इन फोरेंसिक मेडिसिनी (1962)' था। द जरनल ऑफ फोरेंसिक एन्थ्रोपोलॉजी का प्रथम प्रकाशन 1956 में हुआ। इस विषय में केरली (1965) ने भी काफी योगदान दिया तथा इनके कार्यों को अटिलविस्ट एवं डैम्सटर (1975) तथा थोम्पसन (1979) के द्वारा विकसित किया गया।

भारत में शारीरिक मानव विज्ञान सम्बन्धी कार्य

भारत में शारीरिक मानव विज्ञान का अध्ययन **मानवमिति** से शुरू होता है क्योंकि ऐसा विश्वास किया जाता था कि मानवमितीय मापों से सभी समस्याओं का हल किया जा सकता है। भारतीय शारीरिक मानव वैज्ञानिक खोजों का विश्लेषण करने पर पता चलता है कि इसके अन्तर्गत मुख्य रूप से दो तथ्यों का अध्ययन किया जाता है—(i) प्रजातीय इतिहास का निर्धारण तथा (ii) मानव के रक्त सम्बन्धी तथा देहमिति का अध्ययन। अतः भारतीय शारीरिक मानव विज्ञान **वंश विज्ञान** (Ethnology) के आधार पर विकसित हुआ। बाद में यह अनुभव किया जाने लगा कि मापों और सूचकांकों से किसी निश्चित लक्षण की विभिन्नता एवं विकास को समझा जा सकता है परन्तु कुछ लक्षणों के आधार पर सबों को एक जीव विज्ञान के अन्तर्गत नहीं रखा जा सकता। अतः विकास की समस्या, प्रजाति आदि को समझने के लिए अनेक लक्षणों— जैसे खोपड़ी की बनावट एवं स्वरूप, मानवमितीय संरचना, पिगमेन्टेशन, विकास की प्रक्रिया आदि को समझना आवश्यक है और यहीं से शारीरिक मानव विज्ञान का विश्लेष्णात्मक अध्ययन शुरू होता है।

भारत की प्रजातियों के वर्गीकरण के क्रम में सबसे पहला प्रयास नेसफील्ड का था किन्तु यह अध्ययन बहुत ही सीमित था। भारतीय प्रजातियों के वर्गीकरण का प्रथम श्रेय सर हर्बट रिगले को है। रिगले के पूर्व उज्फाल्वी ने पश्चिमी हिमालय में रहने वाले लोगों को मापा जिसके परिणाम 1884 और 1896 में प्रकाशित हुए। रिगले मानवमितिक अध्ययन के आधार पर अपनी पुस्तक 'द पीपुल ऑफ इंडिया' में भारत की प्रजातियों को सात भागों में बाँटा है परन्तु इन्होंने प्रमुख प्रजातियाँ है। शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने रिगले के आंकड़ों की वास्तविकता एवं विश्लेषण की विधि तीन ही मानी पर संदेह किया।

रिगले के समकालीन ए० सी० हैडन (1919) ने रिगले के वर्गीकरण की आलोचना की और एक अन्य वर्गीकरण प्रस्तुत किया। हैडन ने भारत के आदिवासियों को आदि द्रविड़ प्रजाति कहते हुए द्रविड़ों से भिन्न बताया। जे० एच० हटन (1931) ने भारतीय समाज में विद्यमान प्रजाती तत्वों का विश्लेषण किया और बतलाया कि सबसे प्राचीन तत्व नीग्रिटो है जो अब केवल मुख्य रूप से अण्डमान में पाया जाता है।

रिगले के सारांश का डॉ० बी० एस० गुहा (1931) ने विरोध किया। इसी वर्ष जनगणना के

दौरान गुहा ने मानवमितीय मापों के आधार पर भारतीय लोगों का वर्गीकरण किया जो अन्य वर्गीकरणों की तुलना में अधिक उपयोगी है। बी० पी० दत्ता (1939) ने कुछ बंगाली लोगों की माप करके यह दर्शाने की चेष्टा की कि कपाल अस्थि जोड़ एवं बांह की लम्बाई के बीच सह-सम्बन्ध है। एच० सी० चकलादर (1936) ने भारतीय प्रजातीय लक्षणों का पूर्ण अध्ययन किया और पाया कि बीरभूम जिला (बंगाल) के ररही ब्राह्मण और मुची में मेडिटेरेनियन तत्व पाये जाते हैं। इनमें चौड़ी नाक का अभाव है जो रिगले द्वारा निर्धारित लक्षण से सर्वथा विपरीत है।

इनके अलावा इस दिशा में अनेक शोधकर्त्ताओं ने विस्तृत भौगोलिक क्षेत्रों का अध्ययन किया जो अधिकांशतः वर्णानात्मक हैं और मुख्यतः मानवमितीय मापों पर आधारित है। महालानोबीस ने (1922-31) एंग्लोइंडियन पर कार्य किया जो मानवमितीय लक्षणों पर आधारित था। इनके कार्यों से अनेक विद्वान् प्रभावित एवं आकर्षित हुए। ए० एन० चटर्जी ने सराइकेला (बिहार) के 'हो' जनजाति और बंगाली विद्यार्थियों की वृद्धि पर कार्य किया। एल० ए० कृष्णा आइयर ने अपना अध्ययन का केन्द्र ट्रेवेन्कोर की आदिम जनजाति को बनाया। इरावती कार्वे ने चीत पवन ब्राह्मण, मध्य नदिना और मराठा जातियों पर शारीरिक लक्षणों का विश्लेषण किया। बी० के० चटर्जी बिहार के मैथिली और कनौजिया ब्राह्मण पर कार्य किया। पी० सी० बसु मुण्डा और उराँव जनजाति के प्रजातीय समानताओं का विश्लेषण किया। जी० एच० धुर्येय काठियावाड़ के लोगों के शारीरिक लक्षणों का विवेचन किया। ए० के० मित्रा बंगाल के वनरोजा वैद्य और ररही वैद्य पर मानवमितीय अध्ययन किया। जी० एस० राय ने बंगाल के राजवंशी और उड़ीसा के खोंड जनजाति को अध्ययन का केन्द्र बनाया। आर० सी० राय ने उड़ीसा के पहाड़ी माड़िया, विसन माड़िया एवं पहाड़ी भूइया आदि पर कार्य किया। चतुर्भुज साहु ने बिहार के उराँव तथा संथाल जनजाति तथा इसी क्षेत्र के तेली जाति पर मानवमितीय कार्य किया है।

डा० डी० एन० मजूमदार ने हो, सउरा, गोंड, भील, नुनिया आदि पर गहन अध्ययन किया। इन्होंने गुजरात के विभिन्न जाति एवं जनजातियों के बीच ऊँचाई और भार पर विशेष कार्य किया और मानवमितीय सर्वेक्षण भी किया। प्रो० मुखर्जी ने कलकत्ता के बच्चों पर शारीरिक विकास से सम्बन्धित कार्य किया। डॉ० एस० एस० सरकार के कार्य शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में विशेष महत्वपूर्ण हैं। इन्होंने केरल के कादर जनजाति पर कार्यों किया और गुहा के कार्यों का विरोध किया है। इनका कार्य भारत के प्रजातीय तत्वों पर एक नई दिशा प्रदान करती है। इन्होंने भारतीय लोगों को कपालीय देशना के आधार पर वर्गीकृत करने की कोशिश की है और कहा है कि भारत मुख्यतः लम्बे सिर वालों का देश है। इन्होंने अपनी पुस्तक 'दी एवोरिजनल रेसेस ऑफ इंडिया' (1954) में भारत के आदिम निवासियों के लिए शारीरिक मानव विज्ञान से सम्बन्धित अनेक नंये तथ्यों को उजागर किया है।

मानव कंकाल से सम्बन्धित कार्य

मानव के कंकाल से सम्बन्धित क्षेत्रों पर बहुत ही कम शोध कार्य हुए हैं, फिर भी सर आर्थर

कीथ (बयाना और सियाल कोट की खोपड़ी पर) हन्ट (रायगीर की खोपड़ी पर) कर्नल सेवेल और बी० एस० गुहा (नाल, मकरन और मोहन जोदाड़ो के कंकालीय अवशेष पर) और जुकुरमैन (आदि-तवलुर की खोपड़ी पर) आदि के कार्य काफी महत्वपूर्ण हैं। (डब्ल्यू० एम० क्रोगमेन० एवं डब्ल्यू० एच० सेसामन ने चान्होदारों में एक खोपड़ी प्राप्त की और इस खोपड़ी में प्रोटो-मेडिटेरिनियन एवं नीग्रों लक्षण पाये गये। एच० डी० संकालिया एवं इरावती कार्बे लांघनाज (गुजरात) से मानव के अस्थिपंजर प्राप्त किये। इसमें नीग्रो लक्षण देखा गया परन्तु गुहा इससे सहमत नहीं थे। वी० एस० गुहा, एस० एस० सरकार एवं एच० के० बोस टक्सीला के धर्मराजी के से मानव के अवशेष पर अध्ययन किये जबकि बी० के० चटर्जी एवं पी० गुप्ता अदितनालुर खोपड़ी पर ध्यान केन्द्रित किया और इनमें मेडिटेरेनियन तथा आस्ट्रेलॉयड लक्षण की पुष्टि की। पी० गुप्ता एवं पी० सी० दत्ता ने आंध्र प्रदेश के रौलेश्वरम की खुदाई की और प्राप्त अस्थियों के अध्ययन से पता चला कि ये अस्थियाँ अधिकांशतः सियालकोट के खोपड़ियों से मिलते थे।

आधुनिक युग में एस० एस० सरकार ने लोथल से प्राप्त अस्थियों का गहन अध्ययन किया जबकि पी० गुप्ता, ए० बसु एवं० ए० राय ने उज्जैन से प्राप्त अस्थियों के लक्षणों का वर्णन किया। एस० दूहाई, ए० आर० केनेडी और के० सी० मल्होत्रा के कार्य काफी सराहनीय हैं क्योंकि इनके कार्य भारत के प्राचीन प्रजातियों की ओर इंगित करता है।

भारतीय शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने प्रजातीय पहचान के लिए अधिकांशतः त्वचीय प्रतिरूप पर भी विशेष बल दिया है। पी० सी० विश्वास ने अपराधियों, बंगालियों तथा भील जनजाति (राजस्थान) के त्वचीय प्रतिरूपों पर अपना ध्यान केन्द्रित रखा। त्वचीय प्रतिरूपों पर कार्य करने वाले अन्य शारीरिक मानव वैज्ञानिकों में निम्न मुख्य हैं— वी० वी० वर्मा (बिहार के उरॉव), एस० सी० तिवारी (असकोट के राजी तथा अलमोरा के भोटिया), आई० पी० सिंह (पंजाबी), एस० गुप्ता (ट्रैवेन्कोर के उल्लादन) वी० के० चटर्जी एवं अन्य (ट्रेवेनकोर के उराली), डी० राय चौधरी (त्रिपुरा के रियांग), पी० एन० भट्टाचर्या (नेफा के अबोर), एम० आर० चक्रवर्ती (दक्षिण भारत के नयान्दी और पनियान), डी० के० सेन (उत्तर प्रदेश के अपराधियों), ई० सी० बुची (तिब्बतन, उरॉव, अंडमानिज एवं खासी), पी० दास शर्मा (बिहार के मुण्डा एवं उरॉव) चतुर्भुज साहु (बिहार के बिरहोर तथा संथाल) आदि।

एस० एस० सरकार (1954) ने इंगित किया है कि भारतीय आस्ट्रेल्वाइड लोगों में जिसके अन्तर्गत छोटानागपुर (बिहार) की जनजाति आती है, 60 : 40 होर्ल-लूप अनुपात की प्रधानता है। उरॉव में होर्ल लूप अनुपात 60 : 40 पाया गया है लेकिन इसी प्रकार का अनुपात मालेर जनजाति में नहीं मिला है। सरकार ने यह भी कहा कि आस्ट्रिक भाषा के जनजातियों में इसी अनुपात में होर्ल और लूप को प्राप्त होना चाहिए। चक्रवर्ती ने अपने अध्ययन के क्रम में होर्ल और लूप के अनुपात को 7 स्तरों में बाँटा है और पाया है कि होर्ल प्रतिरूप का क्रमिक विकास दक्षिण तथा पूरब की ओर है जबकि लूप की स्थिति होर्ल के ठीक विपरीत है।

भारत में रक्त-वर्ग के प्रकारों तथा जीन आवृत्ति पर कार्य करने वालों में प्रारम्भिक शोधकर्त्ता-मलोनी एवं लाहिरी (1927), पी० एन० मित्रा (1932), ए० अयप्पन (1936), ए० चौधरी (1936), ई०

डब्ल्यू० मैकफरलेन (1937) आदि मुख्य हैं। मैकफरलेन (1938) ने भारत में रक्त-वर्गों के वितरण पर विस्तृत कार्य की है। प्रजातीय पहचान से सम्बन्धित रक्त-वर्ग पद कार्य करने वाला में ई० सी० बुची, एल० ए० कृष्णा आइयर, डी० एन० मजुमदार, एस० एस० सरकार, एन० सिहाद्रीनाथन, बी० हिमोथी, डे० के० सेन, एन० कुमार, एस० सी० तिवारी आदि मुख्य है। मजुमदार ने भारत के विभिन्न क्षेत्रों के निवासियों का रक्त-वर्ग जांचा और एस० बहादुर की सहायता से भारतीय रक्त-वर्ग का नक्शा तैयार किया। डी० के० सेन ने रक्त वर्ग का अध्ययन बंगालियों में प्रजाति निर्धारण के लिए किया। बी० के चटर्जी और ए० के० मित्रा ने बंगालियों तथा जनजातियों के रक्त वर्ग पर कार्य किया।

आधुनिक युग में शारीरिक मानव वैज्ञानिक मानव आनुवंशिकी की मूलभूत समस्याओं का अध्ययन सांख्यिकीय विधि के आधार पर कर रहे हैं जिनमें एल० डी० संध्वी (1953) और एस० आर० दास (1956) के कार्य काफी उल्लेखनीय हैं।

शारीरिक मानव विज्ञान का वर्गीकरण

मानव की उत्पत्ति एवं विकास, विभिन्नता, वितरण आदि की स्थितियों के आधार पर शारीरिक मानव विज्ञान को निम्नलिखित भागों में बांटा गया है—

(1) प्राइमेटोलॉजी (Primatology)— मनुष्य में जो गुण विद्यामान हैं उन्हें ढूढ़ते हुए अनेक प्राणी इस प्रकार के मिलते हैं, जिनकी शारीरिक संरचना बहुत कुछ मनुष्य से मिलती है। मनुष्य के विकास की खोज करते हुए शारीरिक मानव वैज्ञानिक जिन प्राणियों से अपनी कहानी प्रारम्भ करते हैं उन्हें प्राइंमेट (प्राथमिक वर्ग) कहा गया है, क्योंकि इनके पूर्व के प्राणियों के साथ मनुष्य का किसी प्रकार का सम्बन्ध स्थापित नहीं किया जा सकता। सर्वप्रथम कैरोलस लिनियस (1707-1778) ने इन सभी प्राणियों के लिए प्राइमेट्स नाम रखा क्योंकि इस वर्ग के प्राणियों से प्रारम्भ करके ही विकास की श्रृंखला एक-एक कड़ी के साथ अग्रसर होती मनुष्य तक पहुंचती है।

प्राइमेटोलॉजी प्राइमेट वर्ग के प्राणियों का क्रमिक अध्ययन है। इसके अन्तर्गत आने वाले प्राणी विभिन्न क्षेत्रों में फैले हुए हैं तथा विभिन्न रूपों में पाये जाते हैं जिनमें मानव भी एक प्राणी है। इस वर्ग के अन्तर्गत आने वाले प्राणियों में चूहे के समान छोटे प्राणी—माइक्रोसिबस से लेकर गोरिल्ला जैसे विशाल जीव आते हैं। इन तमाम जीवों के विकास तथा जीवन पद्धति में काफी अन्तर है। अतः शारीरिक मानव विज्ञान के लिए प्राइमेट्स का समग्र अध्ययन काफी महत्वपूर्ण है क्योंकि प्राणि-जगत् में मानव का स्थान निर्धारित करने के लिए इन जीवों का अध्ययन करना जरूरी है।

(2) प्रजाति-विज्ञान (Ethnology)— यह विज्ञान मानव की विभिन्नताओं का अध्ययन करने वाला है। सभी प्राणियों के लिए विभिन्नता एक महत्वपूर्ण लक्षण है। उस पर भी मानव के लिए तो यह विभिन्नता अत्यधिक प्रभाव डालती है। इसी विभिन्नता के आधार पर पूरे विश्व के लोगों को विभिन्न प्रजातियों में बाँटा गया है। इन प्रजातियों को अब मेन्डलीय जनसंख्या, इनब्रीडिंग समूह जिनमें सामान्य जीन पूल है आदि के आधार पर समझा जा रहा है। अतः वह विज्ञान जो प्रजातीय समूह के प्रकृति,

निर्माण एवं विभिन्नता आदि का अध्ययन करने का प्रयास करता है वह प्रजाति-विज्ञान के नाम से जाना जाता है।

(3) **मानव जीव विज्ञान (Human Biology)**— आधुनिक युग में वैज्ञानिकों के बीच यह चर्चा का विषय है कि शारीरिक मानव विज्ञान को जैवीय मानव विज्ञान (Biological anthropology) के नाम से पुकारा जाना चाहिए। शारीरिक मानव वैज्ञानिकों के आधुनिक खोज अधिकांशतः प्राणि-शास्त्रीय सिद्धांतों पर मेल खा रहा है। मानव भी एक प्राणी है परन्तु वह अन्य प्राणियों से संस्कृति के कारण ही अलग है और सर्वश्रेष्ठ है। यदि मानव से उसकी संस्कृति छीन ली जाए तो मानव भी एक प्राणी मात्र ही रह जायेगा। ह्यूमेन बायलॉजी संस्कृति से ही प्रभावित होती है। कभी-कभी तो संस्कृति प्राणि-शास्त्रीय पद्धति को बदल देती है। अतः शारीरिक मानव विज्ञान अधिकांशतः मानव के जैविक लक्षणों को ही अध्ययन करने में संलग्न है। इसके साथ ही साथ यह विज्ञान यह भी जानने में लगा हुआ है कि मानव का प्रादुर्भाव जब से इस पृथ्वी पर हुआ है तब से उसका विकास, परिवर्तन एवं शारीरिक बनावट में क्या-क्या एवं कैसे परिवर्तन हुआ।

(4) **मानव पुरातन विज्ञान (Palaeo anthropology)**— मानव पुरातन विज्ञान के अन्तर्गत मानव के विभिन्न रूपों का प्राणि-शास्त्रीय इतिहास को दर्शाया जाता है तथा पुरातन विज्ञान जीवों और उनके व्यवहारों के बीच गहरा सम्बन्ध को समझाने का प्रयास करता है। इसका शाब्दिक अर्थ 'पुराने युगों के मानवों का अध्ययन' है। इसके अन्तर्गत प्राप्त की गई प्रस्तरित हड्डियों का अध्ययन मुख्य है। प्रस्तरित हड्डियों का अध्ययन ही हमें पौराणिक जीवों से सम्बन्ध स्थापित कराता है। यही विज्ञान मानव और गैर मानव के बीच की लुप्त कड़ी को जोड़ती है। प्रस्तरित हड्डियों को प्राप्त करने के बाद पुरातन वैज्ञानिक अध्ययन करके उन हड्डियों की तिथि एवं काल निर्धारित करते हैं और यह ज्ञात करते हैं कि इनका सम्बन्ध किस युग के साथ है। जिस चट्टान में प्रस्तरित हड्डी पायी जाती है उसकी आयु भी उस चट्टान के समरूप ही होती है। प्रस्तरित हड्डियों के अध्ययन के आधार पर पृथ्वी के आरम्भ से अब तक के समय को युगों में बाँटा गया है और प्रत्येक युग को कालों में। इस प्रकार एक भूगर्भीय समय-सारणी बनायी गई है। प्रस्तरित हड्डियों की तिथि एवं काल निर्धारित करने के लिए C^{14} तथा फ्लोरीन गैस आदि विधियों का उपयोग किया जाता है। यह देखा गया है कि जो फासिल (जीवाश्म) जितना अधिक पुराना होगा उसके अन्दर फ्लोरीन गैस की मात्रा भी उतनी ही अधिक होगी।

शारीरिक मानव वैज्ञानिक मनुष्य एवं बनमानुष की हड्डियों का तुलनात्मक अध्ययन करते हैं और प्राप्त प्रस्तारित हड्डियों का विश्लेषण करके उसे विकास की कड़ी में स्थापित करते हैं। अतः जीवाश्मों के अध्ययन द्वारा यह ज्ञात किया जाता है कि मनुष्य कितना पुराना है, उस काल में कौन-कौन से जीव-जन्तु हैं, उनमें क्या-क्या समनता एवं असमनताएँ हैं।

(5) **मानव आनुवंशिकी (Human Genetics)**- शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में मानव आनुवंशिकी का महत्वपूर्ण स्थान है क्योंकि इसके बिना उद्विकासीय अध्ययन सम्भव नहीं है। आनुवंशिकीय अध्ययन वंशागति के सभी पक्षों पर विचार करता है जैसे— जीन तथा उसका आकार व प्रकार, क्रोमोसोम पर उसकी स्थिति, क्रोमोसोम का आकार-प्रकार, उनका प्रतिवलन, युग्मन तथा विभाजन, कोशिकाओं का

निर्माण तथा विभाजन आदि। आनुवंशिकीय सिद्धांत को मानव के संदर्भ में प्रयुक्त कर अध्ययन किया जा रहा है और मानव के उन तमाम लक्षणों का अध्ययन किया जा रहा है जिनका हस्तातंरण एक पीढ़ी से दूसरे पीढ़ी में होता चला आ रहा है। यह हस्तान्तरण माता-पिता और उनके बच्चों में ही पाया जाता है। अतः आनुवंशिकी एवं उसकी पद्धतियों का अध्ययन अत्यन्त ही आवश्यक है ताकि मानव की उत्पत्ति एवं विकास को आसानी से समझा जा सके। पीढ़ी-दर-पीढ़ी से हो रहे हस्तान्तरित लक्षणों में वातावरण एवं अन्य कई कारकों के द्वारा हो रहे प्रभावों के कारण ही मानव को आज विभिन्न प्रजातीय समूहों में बाँटना पड़ रहा है। बहुत से गुणों के साथ-साथ बहुत से अवगुणों तथा रोग भी अपने माता-पिता से प्राप्त होते हैं, इसलिए आधुनिक युग में शारीरिक मानव विज्ञान का अधिकांश शोध कार्य आनुवंशिक लक्षणों पर आधारित है। कुछ रोग ऐसे भी हैं जो एक पीढ़ी से दूसरी, तीसरी, चौथी पीढ़यों तक चलते जाते हैं। ऐसे रोगों द्वारा वंशों के नाश होने आदि से बचाने के लिए मनुष्य के आनुवंशिक गुणों का अध्ययन आवश्यक होता है। मनुष्य में उत्पन्न बहुत से दोषों का अब आनुवंशिकी आधार का भी पता लग गया है और मानव क्रोमोसोम पर जोरो से कार्य हो रहे हैं। उत्परिवर्ती जीन के कारण होने वाले विकार जैसे— लघु अंगुलिता, हंटिग्टन कोरिया, दात्र कोशिका, अरक्तता, फिनाइलकिटोन्यूरिया, हीमोफीलिया आदि। क्रोमोसोम की रचना में विविधता होने के कारण होने वाले दोष जैसे— कैट-क्राई संलक्षण, क्रोमोसोम की संख्या में विविधता होने के कारण होने वाले दोष-जैसे— 21वीं क्रोमोसोम की एकाधिसूत्रता (डाउन सिन्ड्रोम), 21वीं क्रोमोसोम की एक सूत्रता तथा रूधिर वर्ग से सम्बन्धित रोग आदि मुख्य हैं।

मानव आनुवंशिकी के मुख्य क्षेत्र मानव जैव रसायन आनुवंशिकी रक्त आनुवंशिकी, चिकित्सा आनुवंशिकी, जनसंख्या आनुवंशिकी, साधारण तथा व्यवहार आनुवंशिकी, मानव साइटोजेनेटिक्स, विकास आनुवांशिकी, फारमाकोजेनेटिक्स आदि मुख्य हैं।

अतः मानव आनुवंशिकी हेरोडिटी के आधारभूत सिद्धांत और उसके प्रभाव, मनव आनुवंशिकी को नियंत्रित करने वाले सिद्धांत, मानव में परिवारों, पेडिगिरी (वंशावली) तथा समूह से हस्तांतरित होने वाले लक्षण, आनुवंशिक लक्षणों को हस्तांतरित करने वाले नियम, हस्तांतरित होने की प्रवृत्ति को पता लगाने की विधि आदि से सम्बन्धित है। इसके अलावा यह मानव जीन में होने वाले वातावरण का प्रभाव आदि से भी सम्बन्धित है।

(6) **चिकित्सा मानव विज्ञान** (Medical Anthropology)— शारीरिक मानव विज्ञान के अन्तर्गत उन तमाम रोगों का अध्ययन किया जाता है जो सदा से मानव समाज के बीच रहा है। अध्ययन के क्रम में यह पाया गया है कि कोई विशेष रोग किसी विशेष परिवार में, किसी विशेष जाति के लोगों में तथा किसी विशेष प्रजातीय समूह में ही पीढ़ी-दर-पीढ़ी हस्तांतरित होता चला आ रहा है। शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने उस विशेष परिवार, जाति तथा प्रजाति के बीच उनके जीवन शैली का अध्ययन करके पता लगाया है और उसे जनसमूह तक पहुँचाया है। शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने चिकित्सा विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के लिए बहुत ही महत्वपूर्ण विधियों, सिद्धांतों एवं तथ्यों को विकसित किया है। (हसन एवं प्रसाद[4, 5])। परिस्थितिकी एवं भोजन सिर्फ मानव की वृद्धि को ही प्रभावित

नहीं करते बल्कि इनका प्रभाव रोगों से भी सम्बन्धित है। इसलिए सभी स्वास्थ्य केन्द्रों के लिए शारीरिक मापों का अध्ययन आवश्यक होना चाहिए।

शारीरिक मानव वैज्ञानिक मानव के हड्डियों का अध्ययन क्रमिक विकास के रूप में करता है जबकि चिकित्सा विज्ञान के अन्तर्गत हड्डी में होने वाले रोगों का अध्ययन करता है और उन रोगों को दूर करने के लिए चिकित्सकों को सुझाव देता है।

(7) शरीर क्रिया मानव विज्ञान (Physiological Anthropology)— प्राचीन युग में शारीरिक मानव वैज्ञानिक मुख्य रूप से मानव के अस्थिपंजरों का ही अध्ययन करने में व्यस्त थे तथा शारीरिक बनावट से सम्बन्धित मापिक लक्षणों पर विशेष बल देते थे परन्तु आज इनका क्षेत्र विस्तृत हो गया है और मानव शरीर के जैवीय रासायनिक तत्वों का भी विस्तृत अध्ययन होने लगा है। अतः शारीरिक मानव विज्ञान का मुख्य केन्द्र बिन्दु जैवीय रासायनिक तत्वों में हो रहे बाहरी कारकों जैसे— जलवायु, भोजन पद्धति आदि का प्रभाव हो गया है। इसलिए शारीरिक मानव विज्ञान के अन्तर्गत शरीरक्रिया मानव विज्ञान का एक विशेष शाखा बनाया गया है, ताकि प्राइमेट्स एवं मानव के जैवीय रासायनिक तत्वों की विभिन्नताओं का अध्ययन सुचारूपूर्वक की जा सके।

8. फोरेन्सिक मानव विज्ञान (Forensic Anthropology)— यह विज्ञान शारीरिक मानव विज्ञान का एक महत्वपूर्ण शाखा के रूप में 1921 से उभर रहा है तथा डब्ल्यू० एम० क्रोगमैन (1939) के कार्य के बाद इस पर विशेष बल दिया गया है। इसके अन्तर्गत प्रत्येक व्यक्ति को उसके जैवकीय लक्षणों के आधार पर पहचानने की विधि का अध्ययन किया जाता है। आज बढ़ते अपराध ने इस विषय को महत्वपूर्ण बनाने में पूर्ण-सहयोग किया है। शारीरिक मानव विज्ञान हड्डियों की विशेषताओं के आधार पर मनुष्य और बनमानुष में अन्तर स्पष्ट करता है। परन्तु आधुनिक खोजों ने मानव को पहचानने का एक पृथक सिद्धांत प्रदान किया है। इसके लिए मानव की अंगुली, हथेली एवं तलवे के त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन किया जाने लगा है। भ्रूण के 13 वें सप्ताह में ही जो प्रतिरूप बन जाता है वह आजीवन उसी रूप में रहता है। यह प्रत्येक व्यक्ति में अलग-अलग होता है। मोनोजाइगोटिक जुड़वे बच्चे में भी महीन रेखाओं की संख्या भिन्न-भिन्न होती है। प्रतिरूपों की यह विभिन्नता आनुवंशिक होती है और इनके विकास में अनेक जीनों का योगदान होता है। इसका प्रयोग अनेक आनुवंशिकीय अध्ययनों में किया जाता है। इसके अलावा इस विज्ञान के अन्तर्गत रक्त-निचोड़न आदि का भी गहन अध्ययन किया जाता है। इन्हीं लक्षणों के आधार पर आज अपराधियों की पहचान आसानी से की जा रही है।

(9) पोषण मानव विज्ञान (Nutritional Anthropology) — यह शारीरिक मानव विज्ञान की वह शाखा है जिसके अन्तर्गत मानव के उन तथ्यों का अध्ययन किया जाता है जिसका सम्बन्ध भोज्य पदार्थ से है तथा उसके प्रभाव से हो रहे वृद्धि एवं विकास का भी अध्ययन किया जाता है।

भारत जैसे विकासशील देश के लिए वृद्धि एवं विकास का अध्ययन अति महत्वपूर्ण है क्योंकि यहाँ प्रोटीन, कैलोरी, कुपोषण आदि आम लोगों के स्वास्थ्य की एक प्रमुख समस्या है। बच्चे बढ़ते

हैं परन्तु वृद्धि की दर प्रत्येक बच्चे में अलग-अलग आयु में एकसमान नहीं होती तथा उन बच्चों में भी एक समान नहीं होती है जिनका जन्म तथा लालन-पालन विभिन्न आर्थिक स्तर के परिवारों में होता है। बच्चों के शरीर की वृद्धि में भोज्य पदार्थ एक महत्वपूर्ण कारक है। इसके अलावा वृद्धि के प्रभावित करने वाले कई अन्य कारक हैं जिन्हें मुख्यतः दो वर्गों में विभक्त किया जा सकता है— आनुवंशिकी एवं वातावरण। पोषण मानव वैज्ञानिकों ने विभिन्न वातावरण में रहने वाले लोगों के भोजन पद्धति का अध्ययन किया है और वातावरण के प्रभाव को भी दर्शाने की चेष्टा की है।

(10) दन्त मानव विज्ञान (Dental Anthropology)— दन्त मानव विज्ञान मानव के दांतों का विज्ञान है। इसका अध्ययन 19 वीं शताब्दी के सातवें दशक से प्रारम्भ हुआ है। दांतों के अध्ययन का महत्व मानव शरीर के अन्य तन्त्रों के समान ही है। प्रस्तरित हड्डियों से लेकर जीवित दांतों तक का अध्ययन हो रहा है परन्तु शोध की एक रूपीय कोई विधि निर्धारित नहीं हो पायी है। इस विज्ञान के अन्तर्गत दांतों का विकास, दांतों की उत्पत्ति, आकारिकी, दांतों के स्वास्थ्य आदि का अध्ययन होता है। दांतों का विकास के अन्तर्गत दाँत बनने की प्रक्रिया, जन्म से 26वीं महीने तक दांतों के जड़ों का विकास, स्थायी दांतों का विकास एवं उसका वर्गीकरण आदि शामिल हैं। दाँतों की बाहरी आकारिकी के अन्तर्गत दांतों के मापिक और अमापिक लक्षणों का अध्ययन होता है।

शारीरक मानव विज्ञान के अन्तर्गत मानव एवं अन्य प्राणियों के दांत एवं दंत-सूत्र का अध्ययन बहुत ही महत्वपूर्ण है। दांत मानव के रूप एवं आकार को दर्शाता है तथा उनके भोजन पद्धति को भी इंगित करता है। दांत मजबूत होता है इसलिए प्राप्त प्रस्तरित हड्डियों में दांत भी प्रस्तरित रूप में मिला है। इन दांतों के आधार पर मानव के विकास, वृद्धि, शरीर की रूप, रेखा, आनुवंशिकीय लक्षणों तथा फोरेंसिक विज्ञान आदि से सम्बन्धित तथ्यों पर निष्कर्ष भी दिया जाता है। इसलिए दांत की बाहरी रूप रेखा का अध्ययन अति आवश्यक है और इसी आवश्यकता को ध्यान में रखते हुए दंत मानव विज्ञान का विकास हुआ है।

(11) मानवमिति (Anthropometry)— शारीरिक मानव विज्ञान के अन्तर्गत मानव की अस्थियों तथा जीवित या मृत मानव को क्रमबद्ध तरीके से मापा जाता है। अतः क्रमबद्ध तरीके से मापी जाने वाली प्रविधियों के समूह को मानवमिति का नाम दिया गया है। मानवमिति साधारणतः मानव विकास के अध्ययन से सम्बन्धित है तथा मानव प्रजातियों को निर्धारित करने और उन्हें विभिन्न वर्गों में अलग करने के लिए प्रयोग में लायी जाती है। यह मानव शरीर की लम्बाई, चौड़ाई, मोटाई, आकार एवं अनुपात आदि के अध्ययन में प्रयुक्त होता है। इसके द्वारा यह भी जाना जाता है कि एक व्यक्ति दूसरे व्यक्ति से शारीरिक आकार तथा रचना में किस प्रकार भिन्न है या एक व्यक्ति में बाल्यावस्था से प्रौढ़ावस्था तक शारीरिक आकार तथा रचना का विकास किस प्रकार होता है, अमुक अस्थि स्त्री की है या पुरुष की, वानर की है या मानव की आदि तथ्यों को जानने के लिए मानवमिति अति उपयोगी है। मानवमिति का क्षेत्र पर्याप्त विस्तृत है। इसका उपयोग प्रारम्भ से ही मानव की वृद्धि एवं विकास तथा प्रजातीय वर्गीकरण के अध्ययन के लिए किया जाता रहा है। इसकी उपयोगिता केवल मानव विभेदों के अध्ययन के लिए ही नहीं, वरन् अनेक व्यवसायिक क्षेत्रों में भी की जाती है। प्राइमेटों के

तुलनात्मक अध्ययन तथा उद्‌विकास सम्बन्धी अध्ययनों के लिए यह एक अमूल्य साधन है।

मानवमिति की कई देशनायें तो व्यक्ति की शारीरक वृद्धि, शारीरिक गठन इत्यादि को दर्शाने की उत्तम सूचक है। द्वितीय विश्व युद्ध के दौरान शारीरिक मानव विज्ञान को विशेष रूप से स्वीकार किया गया और सेना एवं औद्योगिक समस्याओं से सम्बन्धित अध्ययनों जैसे— मानव का शारीरिक आकार, सेफेलोफेसियल विभिन्नता आदि पर विशेष महत्व दिया जाने लगा। उसके बाद इसकी उपयोगिता पोशाक बनाने में व्यक्तियों के नियोजन में, वाहन में निश्चित सीट देने में, फर्निचर बनाने आदि-आदि में विशेष रूप से होने लगी। मानवमिति ने ही कार्यालय, स्कूल, प्रयोगशाला एवं घरों को विभिन्न प्रकार के फर्निचरों से सुसज्जित किया है।

(12) इरगोनोमी (Ergonomy)—इरगोनोमी वह विज्ञान है जिसमें मानव का अध्ययन उसके कार्य करने की परिस्थिति के संदर्भ में किया जाता है। विभिन्न जलवायु प्रदेशों में निवास करने वाले मानव तथा उन परिस्थितियों में कार्य करने की शर्तों में सामंजस्य लाने के लिए आवश्यक वस्तुओं से सम्बन्धित समस्या को हल करना ही विज्ञान का मुख्य उद्‌देश्य है।

भारत विभिन्न प्रकार की जलवायु वाला प्रदेश है तथा विभिन्न जलवायु के प्रदेशों में कई औद्योगिक इकाईयों तथा खाने हैं जहाँ मनुष्य काम करते हैं। अतः भारत शारीरिक मानव वैज्ञानिकों के लिए इरगोनोमी जैसे विज्ञान को विकसित करने के लिए बहुत ही उपयोगी अवसर प्रदान करता है। भारत के विभिन्न इकाइयों में कार्यरत लाखों लोगों के लिए यह जानने की आवश्यकता है की शारीरिक कार्यक्षमता जन्मजात प्रजातीय विभिन्नताओं से या विभिन्न जलवायु परिस्थितिकीय कारकों से कितनी मिलती है। इससे पता चल सकता है कि पोषक तत्व तथा स्वस्थ्य वातावरण को विकसित करने से शारीरिक कार्यक्षमता में वृद्धि हो सकती है या नहीं तथा विभिन्न जलवायुवीय प्रदेशों में मानव प्रजाति में कैसे परिवर्तन होता हैं। अतः यह विज्ञान शारीरिक मानव विज्ञान का एक महत्वपूर्ण एवं उपयोगी शाखा है।

(13) डेमोग्राफी (Demography)— यह जनसंख्या का अध्ययन करने वाला विज्ञान है और इसका सीधा सम्पर्क फरटिलिटी (जन्मदर) तथा मोरटलिटी (मृत्युदर) से है। ये दोनों कारक मुख्य रूप से आनुवंशिकी तथा वातावरण के द्वारा प्रभावित होते हैं। जनसंख्या का अध्ययन करने के लिए विभिन्न प्रकार की सांख्यिकीय डाटा का प्रयोग किया जाता है और उसका विश्लेषण किया जाता है। फरटिलिटी और मोरटलिटी के अलावा इसका सम्बन्ध जनसमूह की प्रवृत्ति, वृद्धि, उम्र-लिंग बनावट आदि से भी है। इसलिए इसे एक अलग शाखा में रखा गया है।

(14) इथोलॉजी (Ethology)— यह प्राणी के व्यवहारों का अध्ययन करने वाला विज्ञान है। यह शारीरिक मानव विज्ञान के लिए एक नयी शाखा है लेकिन इसकी उपयोगिता दिन-प्रति-दिन बढ़ती जा रही है। इस विज्ञान के द्वारा यह अध्ययन किया जा रहा है कि आदि मानव का व्यवहार कैसा था और उन व्यवहारों को आज के मानव समूह में देखा जा रहा है या नहीं। इतना ही नहीं इसके अन्तर्गत बन्दर एवं कपियों के व्यवहारों का भी अध्ययन जोरों पर है। इसलिए आज इस शाखा की उपयोगिता

को समझा जा रहा है।

शारीरिक मानव विज्ञान का अन्य विज्ञानों से सम्बन्ध

मानव विज्ञान को वैज्ञानिक रूप प्रदान करने वाली अध्ययन की शाखाओं में शारीरिक मानव विज्ञान का स्थान सर्वोपरि है। शारीरिक मानव विज्ञान की विषय-वस्तु में ही यह इंगित कर दिया गया है कि इस विज्ञान के अन्तर्गत प्राचीन तथा आधुनिक मानव तथा उनसे मिलते-जुलते प्राणियों के शारीरिक लक्षणों का अध्ययन किया जाता है। मानव न केवल जटिल और विकसित प्राणी है बल्कि उसका जीवन रहन-सहन, व्यवहार के तौर-तरीके आदि अत्यन्त ही उलझा हुआ है।

विश्व के सभी मानवों की शारीरिक बनावट एक जैसी नहीं है। किसी प्रजाति में सिर बड़ा होता है और किसी में छोटा, कहीं गोल मुंह, चिपटी नाक होती है और कही चौड़ा मुंह और लम्बी नाक।

अतः इस विज्ञान में प्रस्तारित हड्डियों एवं वर्तमान मनुष्य की हड्डियों तथा विभिन्न अंगों की नाप-तोल लेकर, उनकी परस्पर तुलना की जाती है और तुलनात्मक अध्ययन के आधार पर प्राचीन मनुष्य के शारीरिक स्वरूप का अध्ययन करते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि शारीरिक मानव विज्ञान का सम्बन्ध मनुष्य की शारीरिक विरासत से है।

शारीरिक मानव विज्ञान की प्रकृति एवं विषय-वस्तु को देखने से पता चलता है कि इस विज्ञान ने बहुत कुछ विषय-वस्तु एवं अध्ययन की विधियों को अन्य विज्ञानों से ग्रहण किया है। इसलिए उन सभी विज्ञानों के साथ इसका घनिष्ठ सम्बन्ध है जिनकी समस्याएँ शारीरिक मानव विज्ञान के समान है। इतना ही नहीं आज के वैज्ञानिक युग में कोई भी विज्ञान केवल अपने पांव पर खड़ा नहीं हो सकता। उसे अन्य कई विज्ञानों की मदद चाहिए तभी हरेक विज्ञान का विस्तार रूप होता है। इसी प्रकार शारीरिक मानव विज्ञान भी अपने विस्तार एवं प्रसार के लिए अन्य विज्ञानों से मदद लेती है। उन विज्ञानों की मदद के बिना यह आगे नहीं बढ़ सकती तथा मानव के विकास का अध्ययन नहीं हो सकता।

इस प्रकार शारीरिक मानव विज्ञान का भी सम्बन्ध निम्नलिखित विज्ञानों से है जिनके अनुसंधानों ने शारीरिक मानव विज्ञान पर विशेष प्रभाव डाला है—

(1) शारीरिक मानव विज्ञान एवं मानव जीव विज्ञान में सम्बन्ध

शारीरिक मानव विज्ञान मानव के जैवीय दृष्टिकोण का अध्ययन करता है। अतः यह स्वभाविक है कि इसका सम्बन्ध जीव विज्ञान से होगा। शारीरिक मानव विज्ञान में मानव विकास की क्रमबद्ध प्रक्रिया का अध्ययन किया जाता है। यह विज्ञान हड्डियों का विज्ञान तो है ही, यह मानव जीवन विज्ञान के विभिन्न अवस्थाओं से मुख्य रूप से सम्बन्धित है। मावन विकास की क्रमबद्ध प्रक्रिया को जानने के लिए शारीरिक मानव वैज्ञानिकों को मानव और अन्य प्राणियों के जैवकीय लक्षणों का तुलनात्मक अध्ययन करना जरूरी हो जाता है। आधुनिक शारीरक मानव विज्ञान ज्यादातर जीव-विज्ञान से

सम्बन्धित है जिसमें मानव आनुवंशिकी, वृद्धि और विकास मे सम्बन्धित कारक आदि मानव जीव विज्ञान के विषय-वस्तु को विस्तृत करते हैं।

(2) शारीरिक मानव विज्ञान एवं पुरातन विज्ञान में सम्बन्ध

पुरातन विज्ञान प्रस्तरित हड्डियों का वैज्ञानिक अध्ययन है। इसके अन्तर्गत मनुष्य के प्राचीन पथराये हुए अस्थिपंजरों का अध्ययन किया जाता है। पुरातन वैज्ञानिक प्राप्त प्रस्तरित हड्डियों का विश्लेषण करते हैं और वैज्ञानिक परीक्षणों के आधार पर उनके कालक्रमों को निर्धारित करते हैं।मानव की उत्पत्ति एवं विकास को जानने के लिए शारीरिक मानव वैज्ञानिक मुख्य रूप से प्रस्तरित हड्डियों पर ही आश्रित रहते हैं और इसलिए प्राप्त प्रस्तरित हड्डियों के माध्यम से शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने यह सिद्ध कर पाया है कि कौन-कौन सी शारीरिक विभिन्नताओं के कारण प्राणी, बन्दर, कपि और अंत में मेधावी मानव के रूप में आया। फिर भी अभी लुप्त कड़ी की खोज जारी है और इसके लिए शारीरिक मानव वैज्ञानिक प्रयत्नशील हैं। अतः पुरातन विज्ञान का सम्बन्ध शारीरिक मानव विज्ञान है और दोनों ही एक दूसरे के बिना अधूरे हैं।

(3) शारीरिक मानव विज्ञान एवं भूगर्भ विज्ञान में सम्बन्ध

भूगर्भ विज्ञान में वैज्ञानिक भूमि के गर्भ में जो भी पाया जाता है उन सब का अध्ययन करता है। इसके अन्तर्गत भूमि की प्रकृति एवं बनावट, पृथ्वी की उत्पत्ति, चट्टानों की उत्पत्ति एवं निर्माण, पृथ्वी की विभिन्न सतह आदि अन्य सम्बन्धित तथ्यों का अध्ययन किया जाता है। एक भूगर्भ वैज्ञानिक पृथ्वी के नीचे की मिट्टी को अध्ययन करके वह ठीक-ठीक बतला सकता है कि वह मिट्टी कितने हजार या लाख वर्ष की है। अति प्राचीन काल में निवास करने वाले जीवों के प्रस्तरित रूपों का अध्ययन शारीरिक मानव वैज्ञानिकों के द्वारा होता है। लेकिन उस युग में उन जीवों द्वारा प्रयोग में लाये जाने वाले गुफाओं, पृथ्वी की सतहों आदि जगहों का अध्ययन भूगर्भ वैज्ञानिकों द्वारा किया जाता है। भूगर्भ-शास्त्री प्रस्तरित हड्डियों का अध्ययन नहीं करते हैं बल्कि उन जगहों का अध्ययन करके बताते हैं कि अमूक चट्टान या पृथ्वी की सतह आज से अमूक वर्ष पूर्व निर्मित हुई है। इनके द्वारा निर्धारित की गई तिथियों का मेल प्रस्तरित हड्डियों के साथ की जाती है और उन दोनों वैज्ञानिकों के द्वारा निर्धारित की गयी तिथि में एकरूपता आने पर उस प्राणी का काल-क्रम तय होता है। अतः दोनों ही विज्ञान आपस में सम्बन्धित हैं।

(4) शारीरिक मानव विज्ञान एवं प्राणि-विज्ञान में सम्बन्ध

प्राणि-विज्ञान काफी पुराना विज्ञान है। इसके अन्तर्गत संसार में पाये जाने वाले छोटे-बड़े सभी जीवों के शारीरिक लक्षणों का अध्ययन किया जाता है। प्राणि-शास्त्र में उन जीवों का भी अध्ययन किया जाता है जो आज से लाखों वर्ष पहले जमीन , आकाश और पानी में रहने वाले जीव थे, परन्तु वे जीव अब इस पृथ्वी के किसी भी हिस्से में नहीं पाये जाते हैं। शारीरिक मानव-शास्त्री खुदाई के

क्रम में मानव के अवशेष के साथ ही साथ अन्य जानवरों के हड्डियों को भी प्राप्त करते है। शारीरिक मानव वैज्ञानिक मानव के हड्डियों का वैज्ञानिक जांच के द्वारा काल तथा युग निर्धारित करते हैं लेकिन जानवरों की हड्डियों को लेकर प्राणि- शास्त्री के पास मदद के लिए ले जाते हैं। प्राणि-शास्त्री उन हड्डियों का अध्ययन करता है उसके सम्बन्ध में विशेष जानकारी देता है तथा हड्डी का काल तथायुग का भी निर्धारण करता है। इस प्रकार शारीरिक मानव वैज्ञानिक और प्राणि-शास्त्र के द्वारा निर्धारित की गई तिथियों में एकरूपता पायी जाती है तो उस मनुष्य की वही तिथि तय हो जाती है। अतः ये दोनों विज्ञान एक-दूसरे से सम्बन्धित हैं।

(5) शारीरिक मानव विज्ञान एवं प्रागैतिहासिक पुरातत्व विज्ञान में सम्बन्ध

प्रागैतिहासिक पुरातत्व विज्ञान के अन्तर्गत आदिकालीन मानवों के जीवन के सम्बन्ध में उन तमाम तथ्यों को प्रकाश में लाता है जिनका उल्लेख इतिहास के अन्तर्गत नहीं हुआ है। इसके अन्तर्गत आदिकालीन मानवों के द्वारा बनाये गये विभिन्न प्रकार के पत्थर एवं धातु के उपकरणों, उपकरण बनाने की विधियों, प्राकृतिक विपदाओं से बचने के लिए किये गये प्रयासों आदि का अध्ययन किया जाता है तथा प्राचीन समाजों का अध्ययन करने के लिए प्रमाण प्रस्तुत करता है।

मानव अन्य सभी प्राणियों से श्रेष्ठ है क्योंकि उसने अपनी तीक्ष्ण बुद्धि, दिव्य दृष्टि तथा स्वतंत्र हाथों के द्वारा संस्कृति का निर्माण किया। संस्कृति दो प्रकार की है— भौतिक संस्कृति तथा अभौतिक संस्कृति। भौतिक संस्कृति के अन्तर्गत प्राचीन वस्तुएं, उपकरण आभूषण, बर्तन, मकान आदि आते हैं। प्रारम्भिक उपकरण बेढंगे, वजनी तथा बिना किसी उद्देश्य के बने हुए थे पर बाद में मानवों ने अपनी सूझ-बूझ एवं उपकरणों की आवश्यकतानुसार विभिन्न प्रकार के उपकरणों को बनाये। इनके अवशेष संसार के विभिन्न भागों में मिले हैं। इन उपकरणों के अध्ययन से यह सिद्ध हो गया है कि मानव की संस्कृति का विकास किन-किन चरणों से होता हुआ गुजरा है।

शारीरिक मानव वैज्ञानिक जब मानव के विकास के क्रम को अध्ययन करने के लिए खुदाई करता है और प्रागैतिहासिक काल में पाये गये, मानवों की हड्डियों की खोज करता है तो कई जगहों से उन हड्डियों के साथ-साथ मानव द्वारा बनाये गये पत्थर के उपकरण, धातु के औजार और अन्य सामग्रियाँ भी मिलती है जिनके काल का पता हमें है। इससे हम यह अनुमान लगाते हैं कि उस प्राणी की जिसकी हड्डी मिली है वह भी लगभग उसी काल का रहा होगा।

(6) शारीरिक मानव विज्ञान एवं शरीर क्रिया विज्ञान में सम्बन्ध

आधुनिक शारीरिक मानव वैज्ञानिकों की खोजों ने नई दिशा की ओर ध्यान केन्द्रित किया है। पूर्व में लोग मानव के मापिक लक्षणों पर विशेष बल दे रहे थे पर अब वे मानव शरीर के आंतरिक अंगों की बनावट एवं कार्यों पर शोध कार्य कर रहे हैं तथा मानव शरीर क्रिया के लक्षणों का भी अध्ययन कर रहे हैं। इसके अलावा दिमाग की कार्यात्मक विकास, रक्त-वर्ग, प्राइमेट वर्ग के मानव एवं अन्य प्राणियों की हिमोग्लोबिन पद्धित, मानव एवं अन्य प्राणियों की जैव-रासायन विभिन्नता आदि

क्षेत्रों का भी अध्ययन किया जा रहा है और इन अध्ययनों के माध्यम से मानव के शारीरिक विकास से सम्बन्धित निष्कर्ष निकाला जा रहा है। इस प्रकार के क्षेत्रों से सम्बन्धित शारीरिक मानव विज्ञान के कार्य मानव शरीर क्रिया से काफी हद तक सम्बन्धित होता जा रहा है। इसलिए शारीरिक मानव वैज्ञानिकों को शरीर क्रिया वैज्ञानिकों का योगदान अनिवार्य हो गया है।

(7) शारीरिक मानव विज्ञान एवं चिकित्सा विज्ञान में सम्बन्ध

इन दोनों विज्ञानों में काफी घनिष्ठ सम्बन्ध है। दोनों ही विज्ञान मानव के सम्पूर्ण अस्थिपंजर का अध्ययन करते हैं लेकिन दोनों के अध्ययन के उद्देश्य भिन्न हैं। चिकित्सा विज्ञान के अन्तर्गत अस्थिपंजर का अध्ययन इसलिए किया जाता है कि विभिन्न हड्डियों से सम्बन्धित कौन-कौन सी बीमारियाँ हो सकती हैं तथा उनका इलाज कैसे हो सकता है। इन हड्डियों से लगी हुई मांस-पेशियों का भी अध्ययन किया जाता है परन्तु शारीरिक मानव विज्ञान में मांस-पेशियों तथा अन्य भागों का अध्ययन नहीं किया जाता है बल्कि केवल हड्डियों का अध्ययन किया जाता है और यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि आधुनिक मानव और आदि-कालीन मानव में क्या अन्तर है, तथा यह अन्तर किस तरह बढ़ता चला गया अर्थात इसका तुलनात्मक अध्ययन करते हुए शारीरिक मानव शास्त्री-मानव के लक्षणों के विकास का अध्ययन करते हैं।

दोनों ही विज्ञानों में रक्त-वर्ग का अध्ययन किया जाता है। मानव में चार प्रकार के रक्त-वर्ग होते हैं— A, B, O एवं AB तथा प्रत्येक मनुष्य इन्हीं चार में से किसी न किसी एक वर्ग के अन्तर्गत आता है। रक्त-वर्ग में भी दोनों के अध्ययन करने के उद्देश्य अलग-अलग हैं। शारीरिक मानव-विज्ञान में रक्त वर्ग का अध्ययन प्रजातीय वर्गीकरण के लिए किया जाता है। प्रसिद्ध वैज्ञानिक ब्याड (Boyd) के अनुसार रक्त वर्ग एक ऐसा शारीरिक लक्षण है जिसमें मनुष्य को जन्म से लेकर मृत्यु तक लेश मात्र भी अन्तर नहीं होता है। इसलिए इसके आधार पर प्रजातीय वर्गीकरण करना उचित है।

चिकित्सा विज्ञान ने रक्त-वर्ग का अध्ययन रोग-निवारण के लिए किया जाता है। रक्त वर्ग एवं विभिन्न प्रकार के रोगों के बीच सम्बन्ध की जानकारी की जाती है तथा उन रोगों को दूर करने के लिए उचित चिकित्सा की जाती है।

(8) शारीरिक मानव विज्ञान एवं फोरेन्सिक विज्ञान के बीच सम्बन्ध

फोरन्सिक विज्ञान का मूल चिकित्सा विज्ञान में है। यह विज्ञान प्राप्त अस्थिपंजरों के क्रमिक विश्लेषण के द्वारा व्यक्ति विशेष को पहचानने का कोशिश करता है। व्यक्ति विशेष को पहचानने के क्रम में रक्त-वर्ग, अंगुली, हथेली एवं तलवे की त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन काफी उपयोगी सिद्ध हुआ है। त्वचीय प्रतिरूप भ्रूण के 13वें सप्ताह में अपना निश्चित रूप ले लेती है जो आजीवन अपरिवर्तित रहता है। यह प्रतिरूप हरेक व्यक्ति में अलग-अलग होने के कारण व्यक्तियों को पहचानने में इनका अध्ययन अतिआवश्यक है। इसलिए फोरेन्सिक विज्ञान की उपयोगिता अपराधियों को यह जानने में किया जा रहा है। शारीरिक मानव विज्ञान की विषय-वस्तु को विस्तृत करने में फोरेन्सिक

विज्ञान की भूमिका काफी उपयोगी सिद्ध हुआ है। इसलिए दोनों ही विज्ञान एक दूसरे से घनिष्ट सम्बन्ध बनाये हुए हैं।

(9) शारीरिक मानव विज्ञान एवं डेमोग्राफी के बीच सम्बन्ध

जैसा कि पूर्व में स्पष्ट किया गया है कि डेमोग्राफी जनसंख्या का अध्ययन करने वाला विज्ञान है और जनसंख्या का अध्ययन करने के लिए बहुत से कारकों जैसे— जन्म, मृत्यु, स्थानान्तरण, वृद्धि, उम्र लिंग बनावट आदि पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है। इनके अध्ययन के लिए सांख्यिकीय विधि को प्रयोग में लाया जाता है। इसके द्वारा विभिन्न जनसमूहों में जन्म, मृत्यु-दर आदि का अध्ययन होता है। इसलिए शारीरिक मानव वैज्ञानिक इन आंकड़ों के द्वारा ठोस निष्कर्ष निकालते हैं कि किसी विशेष प्रजातीय समूह में उक्त कारकों की स्थिति क्या-क्या है? अतः शारीरिक मानव विज्ञान को डेमोग्राफी से अलग नहीं किया जा सकता है।

(10) शारीरिक मानव विज्ञान एवं परिस्थितिकी के बीच सम्बन्ध

शारीरिक मानव विज्ञान की देन मानव परिस्थितिकी के क्षेत्र में भी सराहनीय रही है। जीव व उनके चारों ओर के वातावरण में पारस्परिक सम्बन्ध होता है। प्राणी अपने चारों ओर के वातावरण को प्रभावित करते हैं और इसी प्रकार वातावरण भी जीवों को प्रभावित करता है। इस प्रकार जीवों व वातावरण के इस सम्बन्ध को परिस्थितिकी (Ecology) कहते हैं। अतः यह विज्ञान विभिन्न वास स्थानों का अध्ययन करने वाला विज्ञान है। इसके अन्तर्गत जीवों व उनके वाह्य वातावरण के पारस्परिक सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है।

मानव परिस्थितिकी के अन्तर्गत जनसमूह एवं वातावरण के बीच सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है। शारीरिक मानव विज्ञान में मानव परिस्थितिकी का अध्ययन विशेष महत्व रखता है क्योंकि इसके द्वारा यह पता चलता है कि विभिन्न जलवायुवीय परिस्थिति में मानव ने अपने अस्तित्व को किस प्रकार सामंजस्य करते हुए सुरक्षित रखा। अतः मानव के द्वारा ग्रहण की गई प्रक्रिया मानव विकास को एक नई दिशा देती है तथा जैवीय लक्षणों को उजागर करती है। अतः शारीरिक मानव विज्ञान के अन्तर्गत प्राकृतिक वातावरण में मानव की अनुकूलित पद्धति का अध्ययन विशेष महत्व रखता है, इसलिए शारीरिक मानव विज्ञान का सम्बन्ध परिस्थितिकी से है।

(11) शारीरिक मानव विज्ञान एवं इरगोनोमी के बीच सम्बन्ध

इरगोनोमी मानव के कार्य करने की विभिन्न परिस्थितियों के संदर्भ में कार्य करने वाला विज्ञान है। मानव एवं मशीनों के बीच सम्बन्धों को स्थापित करने के लिए शारीरिक मानव विज्ञान का अध्ययन अतिआवश्यक है। मानव के शारीरिक आयामों का अध्ययन मानवमिति के द्वारा किया जा रहा है। मानवमितिज्ञ मापों के आधार पर मशीनों की आकृति एवं रूप-रेखा तैयार करते हैं क्योंकि विभिन्न वायुवीय परिस्थितियों में कार्य करने वालों की शारीरिक बनावट में कुछ अन्तर है। आजकल भारतीय औद्योगिक संस्थानों में तथा प्राइवेट एजेन्सियों में कार्यरत कुशल और अकुशल कर्मचारी जो विभिन्न

जलवायु प्रदेश के हैं, के हित में शोध-कार्य हो रहे हैं।

(12) शारीरिक मानव विज्ञान एवं क्रीड़ा मानव विज्ञान के बीच सम्बन्ध

आज पूरे विश्व में खेल-कूद एवं क्रीड़ा को मानव की शारीरिक आकार एवं वृद्धि के आधार पर वर्गीकृत किया है। खेल-कूद में भाग लेने वाले खिलाड़ियों का वैज्ञानिक अध्ययन निम्नलिखित तीन बिन्दुओं पर किया जाता है।

(1) मानव वैज्ञानिक लक्षण

(2) आनुवंशिक लक्षण एवं

(3) परिवार की स्थिति।

मानव वैज्ञानिक लक्षण के अन्तर्गत खिलाड़ी के शरीर के विभिन्न अंगों की माप ली जाती है और इन मापों के आधार पर शरीर की आकार को निर्धारित किया जाता है। आनुवंशिक ळक्षण के अन्तर्गत विभिन्न कारकों-गणसूत्र, रक्त वर्ग, स्वाद प्रक्रिया, अंगुली, हेथेली एवं तलवे की त्वचीय प्रतिरूप आदि का गहन अध्ययन किया जाता है। खेल के क्षेत्र में इन मानव वैज्ञानिक लक्षणों का अध्ययन क्रमबद्ध तरीके से किया जा रहा है। जिसके कारण क्रीड़ा मानव विज्ञान शाखा विकसित हो गयी है। आज पूरे विश्व में खेल जगत की एक अलग ही पहचान बन गयी है और लाखों-करोड़ों लोग विभिन्न खेलों से जुड़े हुए हैं। अतः उन तमाम खिलाड़ियों को सुविधाजनक विशेष वर्ग में रखने के लिए क्रीड़ा मानव विज्ञान का विकसित होना अनिवार्य है।

(13) शारीरिक मानव विज्ञान एवं जनसंख्या आनुवंशिकी के बीच सम्बन्ध

आधुनिक शारीरिक मानव विज्ञान की खोज ज्यादातर जनसंख्या आनुवंशिकी से सम्बन्धित है। आनुवंशिकता कोई साधारण नहीं अपितु जटिल क्रिया है और जीवधारियों में उत्पन्न समानताओं तथा विभिन्नताओं का अध्ययन आनुवंशिकी के अन्तर्गत किया जाता है। आनुवंशिकी का अर्थ है उत्पत्ति अर्थात जीवधारियों में उत्पन्न गुणों अथवा लक्षणों की समानताओं और असमानताओं की उत्पत्ति ।

मानव भी अन्य जन्तुओं के समान ही है। अतः इन पर भी आनुवंशिकी के सभी नियम लागू होते हैं। इस वैज्ञानिक तथ्य को सिद्ध करने के लिए सर फ्रान्सिस गाल्टन (Sir Francis Galton) ने कुछ विशिष्ट लक्षणों वाले मानव कुटुम्बों का इतिहास एकत्रित किया और पाया कि अच्छे माता-पिता की अच्छी संताने होती हैं तथा यह भी पता चला कि मनुष्यों में अनेक ऐसे लक्षण होते हैं जो वंशागत होते हैं।

इतनी ही नहीं आजकल प्रजाति का अध्ययन आनुवंशिक आधार पर की जा रही है इसलिए इन दोनों विज्ञानों में अटूट सम्बन्ध है।

निर्देश

1. साहु, चतुर्भुज, विज्ञान परि० अनु० पत्रिका, 1994, 37 (2) : 113-137.
2. मौन्टेगु, एम० एफ० ए०, एन इन्ट्रो० फि० एन्थ्रो० यू० एस० ए० 1951, तथा 1960.
3. डेब्ज हेन्स्की, थो०, कोल० यूनि० प्रेस, न्यू यौर्क, 1970.
4. इसन, के० ए० तथा प्रसाद, बी० जी०, इण्डि० मेडि० एसो० 1959, 32: 182-190.
5. इसन, के० ए० तथा प्रसाद, बी० जी०, इण्डि० मेडि० एसो०, 1960, 35, 22-36.

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\ \beta_1\ \gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख ''सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2''इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्यः 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs 60 or £12 or $ 40
Per Vol. Rs. 15 or 3 £ or $ 10

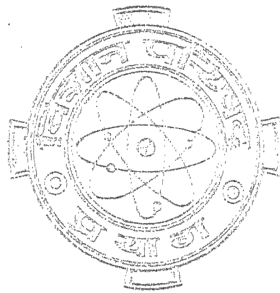
प्रकाशक:

विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
7 ए, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद

Vol. 40 April 1997 No. 2



विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 40 April 1997 No. 2

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 2, April 1997.

बहुपदों की सामान्य श्रेणी वाले समाकल लौरिसेला फलन तथा बहुचारीय I-फलन

सी० के० शर्मा तथा डी० के० तिवारी

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, अवधेश प्रताप सिंह यूनिवर्सिटी, रीवाँ

[प्राप्त - दिसम्बर 19, 1995]

सारांश

इस प्रपत्र में बहुपद की सामान्य श्रेणी, लौरिसेला फलन तथा बहुचर I-फलन वाले छह सामान्य समाकल सूत्रों की स्थापना की गई है।

Abstract

Integrals involving a general class of Polynomials, Lauricella functions and the multivariable I-function. *By* C. K. Sharma and D. K. Tiwari Department of Mathematics and Statistics, A. P. S. University, Rewa-486003 (M. P.)

In this paper, we establish six general integral formulas (four definite integrals and two contour integrals) involving a general class of polynomial [Srivastava (1972)], Lauricella function [Srivastava and Daoust (1969)] and the multivariable I-function [Sharma and Ahmad (In press)].

1. संकेत और परिभाषा

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के सिद्धानत में जो अर्वाचीन विकास हुआ है उनके प्रति अत्यधिक रुचि का कारण हाइपरज्यामितीय फलनों के कतिपय सार्वीकृत रूपों का प्रचलन है। हाल ही में शर्मा तथा अहमद[8] द्वारा प्रचारित बहुचर-I फलन श्रीवास्तव तथा पण्डा[7] द्वारा परिभाषित बहुचर

H-फलन, है। सक्सेना[2], शर्मा एवं मिश्रा[4] द्वारा परिभाषित एक तथा दो चरों वाले I-फलन का विस्तार है। बहुचर I-फलन के सार्वीकृत गुण के कारण इस प्रपत्र में इसका उपयोग छह समाकलों के रूप में भव्य परिणामों को व्युत्पन्न करने के लिए किया गया है।

इस प्रपत्र में आगत बहुचर-I फलन की परिभाषा तथा प्रदर्शन शर्मा तथा अहमद ने[3] निम्न प्रकार से किया है-

$$I[z_1,\ldots,z_r] \equiv I^{0,n\;:(m_1,n_1)\;;\ldots;(m_r,n_r)}_{p_i,q_i:R\;:[p_{i'},q_{i'}:R'];\ldots;\left[p_{i(r)},q_{i(r)}:R^{(r)}\right]}\left[\begin{matrix} z_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ z_r\end{matrix}\right|$$

$$\left[\left(a_j;\alpha'_j,\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{1,n}\right],$$

$$\left[\left(a_{ji};\alpha'_{ji},\ldots,\alpha_{ji}^{(r)}\right)_{n+1,p_i}\right]:\left[\left(c'_j,\gamma_j\right)_{1,n_1}\right],$$

$$\left[\left(b_{ji};\beta'_{ji},\ldots,\beta_{ji}^{(r)}\right)_{1,q_i}\right]:\left[\left(d'_j,\delta'_j\right)_{1,m_1}\right],$$

$$\left[\left(c'_{ji'},\gamma'_{ji'}\right)_{n_1+1,p_{i'}}\right];\ldots;\left[\left(c_j^{(r)},\gamma_j^{(r)}\right)_{1,n_r}\right],$$
$$\left[\left(d'_{ji'},\delta'_{Ji'}\right)_{m_1+1,q_{1'}}\right];\ldots;\left[\left(d_j^{(r)},\delta_j^{(r)}\right)_{1,m_r}\right],$$

$$\left.\begin{matrix}\left[\left(c_{ji}^{(r)}(r),\gamma_{ji}^{(r)}(r)\right)_{n_r+1,p_i(r)}\right]\\ \left[\left(d_{ju}^{(r)}(r)\,\delta_{ji}^{(r)}(r)\right)_{m_r+1,q_i(r)}\right]\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi\omega)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi\left(\xi_1\right)\cdots\phi_r\left(\xi_r\right)\psi\left(\xi_1,\cdots,\xi_r\right)z_1^{\xi_1}\cdots z_r^{\xi_r}\,d\xi_1\cdots d\xi_r, \tag{1.1}$$

जहाँ $\omega = \sqrt{-1}$,

$$\phi_k(\xi_k) = \frac{\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma\left(d_j^{(k)} - \delta_j^{(k)} \xi_k\right) \prod_{j=1}^{n_k} \Gamma\left(1 - c_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} \xi_k\right)}{\sum_{i^{(k)}=1}^{R^{(k)}} \left[\prod_{j=m_k+1}^{q_i(k)} \Gamma\left(1 - d_{ji}^{(k)}(k) + \delta_{ji}^{(k)}(k) \xi_k\right) \prod_{j=n_k+1}^{p_i(k)} \Gamma\left(c_{ji}^{(k)}(k) - \gamma_{ji}^{(k)}(k) \xi_k\right) \right]}$$

$$\forall k \, \varepsilon \, \{1, \ldots, r\} \tag{1.2}$$

तथा

$$\psi(\xi_1, \cdots, \xi_r) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(1 - a_j + \sum_{k=1}^{r} \alpha_j^{(k)} \xi_k\right)}{\sum_{i=1}^{R} \left[\prod_{j=n+1}^{p_i} \Gamma\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ji}^{(k)} \xi_k\right) \prod_{j=1}^{q_i} \Gamma\left((1 - b_{ji} + \sum_{k=1}^{r} \beta_{ji}^{(k)} \xi_k\right) \right]}. \tag{1.3}$$

अन्य समस्त शर्तों समेत जिनका वर्णन शर्मा तथा अहमद ने किया है।[3]

श्रीवास्तव ने[5] बहुपद की सामान्य श्रेणी

$$S_N^M[x] = \sum_{K=0}^{[N/M]} \frac{(-N)_{MK}}{K!} A_{N,K} x^K, N = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.7}$$

पर विचार किया है जहाँ M कोई यादृच्छिक धन पूर्णांक है, गुणांक $A_{N,K}(N, K \geq 0)$ यादृच्छिक असली या संमिश्र अचर हैं तथा $(\lambda)_N$ पोछामर संकेत का घोतन करता है जिसे

$$(\lambda)_N = \frac{\Gamma(\lambda + N)}{\Gamma(\lambda)} = \begin{cases} 1 & \text{यदि } N = 0 \\ \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+N-1), \ \forall & N \in \{1, 2, 3, \ldots\} \end{cases} \tag{1.8}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$A_{N,K}$ गुणांकों का विशिष्टीकरण करने पर $S_N^M[x]$ बहुपदियों को मान्य अर्थोगनल बहुपदों में समानीत किया जा सकता है जिसमें हर्माइट बहुपद, जैकोबी बहुपद, लागेर बहुपद सम्मिलित हैं।

श्रीवास्तव तथा डौस्ट[6] ने कई संमिश्र चरों वाले सर्वीकृत लौरिसेला फलन की परिभाषा निम्नवत् दी है-

$$F^{A:B';\ldots;B^{(r)}}_{C:D';\ldots;D^{(r)}}\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r \end{pmatrix} = F^{A:B';\ldots;B^{(r)}}_{C:D';\ldots;D^{(r)}}\left(\begin{matrix}[(a):\theta',\ldots,\theta^{(r)}]: \\ [(c):\psi',\ldots,\psi^{(r)}]:\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}[(b'):\phi'];\ldots;\left[(b^{(r)}):\phi^{(r)}\right]; \\ [(d'):\delta'];\ldots;\left[(d^{(r)}):\delta^{(r)}\right];\end{matrix}\; y_1,\ldots,y_r\right)$$

$$= \sum_{m'_1,\ldots,m'_r=0}^{\infty} \Omega(m'_1,\ldots,m'_r)\,\frac{y_1^{m'_1}}{m_1\,!},\ldots,\frac{y_r^{m'_1}}{m_r\,!}, \tag{1.9}$$

जहाँ $\Omega(m'_1,\ldots,m'_r) =$

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m_1\theta'_j+\ldots+m_r\theta_j^{(r)}}\prod_{j=1}^{B'}(b_j')_{m_1\phi'_j}\cdots\prod_{j=1}^{B^{(r)}}(b_j^{(r)})_{m'_r\phi_j^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{C}(c_j)_{m'_1\psi'_j+\ldots+m'_r\psi_j^{(r)}}\prod_{j=1}^{D'}(d'_j)_{m'_1\delta'_j}\cdots\prod_{j=1}^{D^{(r)}}(d_j^{(r)})_{m'_r\delta_j^{(r)}}}$$

नीचे हम कुछ संक्षिप्त संकेतन दे रहे हैं जिनका बाद में उपयोग करेंगे।

$$F_1 = F^{A:B';\ldots;B^{(r)}}_{C:D';\ldots;D^{(r)}}\begin{pmatrix} y_1(t-\xi)^{u_1}(\eta-t)^{v_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r(t-\xi)^{u_r}(\eta-t)^{v_r} \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$F_2 = F^{A:B';\ldots;B^{(r)}}_{C:D';\ldots;D^{(r)}}\begin{pmatrix} y_1(\tau+s)^{-\rho_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r(\tau+s)^{-\rho_r} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

$$h_1 = \Omega(m'_1, \ldots, m'_r) \frac{\left(y_1(\eta-\xi)^{u_1+v_1}\right)^{m'_1}}{m_1!} \cdots \frac{\left(y_r(\eta-\xi)^{u_r+v_r}\right)^{m'_r}}{m_r!}, \tag{1.13}$$

$$h_2 = \Omega(m'_1, \ldots m'_r) \frac{\left(y_1 W^{\rho_1}\right)^{m'_1}}{m_1!} \cdots \frac{\left(y_r W^{\rho_r}\right)^{m'_r}}{m_r!}, \tag{1.14}$$

$$g_1(t) = (t-\xi)^{\rho}(\eta-t)^{\sigma} S_N^M[x(\eta-t)] F_1, \tag{1.15}$$

$$g_2(\tau) = e^{W\tau}(\tau+s)^{-\rho} S_n^M[x/(\tau+s)] F_2, \tag{1.16}$$

$$\Delta_1 = \frac{(-N)_{MK}}{K!} A_{N,K}[x(\eta-\xi)]^K, \tag{1.17}$$

$$\Delta_2 = (-N)_{MK} A_{N,K} \frac{(Wx)^K}{K!}, \tag{1.18}$$

जिन पदों को बहुपदी I-फलन में सम्मिलित किया गया है, उन्हें हमारे मुख्य परिणामों में प्रदर्शित किया जावेगा और शेष बातें वही हैं जो (1.1) में दी हुई हैं।

अगले अनुभाग में छः समाकलों के रूप में जो हमारे मुख्य परिणाम दिये गये हैं उन्हें व्युत्पन्न करने के लिए हमें निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता होगी जो प्रमेयिका में दिये गये हैं।

प्रमेयिका

यदि $\mathrm{Re}(\rho) > -1, \mathrm{Re}(\sigma) > -1$ तथा $\xi \neq \eta$ तो

(i)
$$\int_{\xi}^{\eta} g_1(t)\,dt = (\eta-\xi)^{\rho+\sigma+1} \sum_{k=0}^{[N/M]} \Delta_1 \sum_{m'_1,\ldots,m'_r=0}^{\infty}$$

$$h_1 \frac{\Gamma\left\{1+\rho+\sum_{l=1}^{r}(u_l m'_l)\right\} \Gamma\left\{1+\sigma+K+\sum_{l=1}^{r}(v_l m'_l)\right\}}{\Gamma\left[\rho+\sigma+\sum_{l=1}^{r}\{(u_l+v_l)m'_l\}+K+2\right]}, \tag{1.19}$$

प्रत्येक धन पूर्णांक M के लिए। अथ च यदि $W > 0, \tau > -\mathrm{Re}(s)$ तथा $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, तो

(ii)
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} g_2(\tau)\,d\tau = W^{\rho-1} e^{-Ws} \sum_{k=0}^{[N/M]} \Delta_2 \sum_{m'_1,\ldots,m'_r=0}^{\infty}$$

$$\times \frac{h_2}{\Gamma(\rho + K + \sum_{l=1}^{r} \rho_l m'_l)}, \tag{1.20}$$

प्रत्येक धन पूर्णांक M के लिए।

उपपत्ति

(1.19) को सिद्ध करने के लिए सर्वप्रथम परिभाषा (1.9) को सम्प्रयुक्त करते हैं और समाकलन तथा संकलन का क्रम परिवर्तित करते हैं तथा श्रीवास्तव और सिंह के ज्ञात परिणाम[8] (p.165 (1.31)) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान निकालते हैं।

इसी तरह परिणाम (1.20) को भी श्रीवास्तव तथा सिंह[8] की विधि (1.165 (1.31) के बजाय (1.165 1.32) का प्रयोग करके ऊपर दी गई विधि से स्थापित किया जा सकता है।

2. समाकल सूत्र

जिन समाकल सूत्रों की स्थापना की जावेगी वे हैं-

(i)
$$\int_{\xi}^{\eta} g_1(t) I\left[z_1 (t-\xi)^{\mu_1} (\eta - t)^{\nu_1}, \ldots, z_r (t-\xi)^{\mu_r} (\eta - t)^{\nu_r}\right] dt$$

$$= (\eta - \xi)^{\rho+\sigma+1} \sum_{K=0}^{[N/M]} \Delta_1 \sum_{m'_1, \ldots, m'_r = 0}^{\infty} h_1 \; I^{0, n+2}_{p_i+2, q_i+1 : R} \left[\begin{matrix} z_1 (\eta-\xi)^{\mu_1+\nu_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r (\eta-\xi)^{\mu_r+\nu_r} \end{matrix} \right|$$

$$\left. \begin{matrix} \left[-(\rho + \sum_{l=1}^{r} u_l m'_l); \mu_1, \ldots, \mu_r\right], \left[-(\sigma + K + \sum_{l=1}^{r} v_l m'_l); \nu_1, \ldots, \nu_r\right] \\ \left[-(\rho+\sigma+K+1+\sum_{l=1}^{r} (u_l + v_l) m'_l); (\mu_1+\nu_1), \ldots, (\mu_r+\nu_r)\right] \end{matrix} \right] \tag{2.1}$$

$$\mu_k > 0, \nu_k > 0, \operatorname{Re}(\rho) + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \min\left\{\operatorname{Re}\left(d_j^{(k)}/\delta_j^{(k)}\right)\right\} > -1,$$

$$\operatorname{Re}(\sigma) + \sum_{k=1}^{r} \nu_k \min\left\{\operatorname{Re}\left(d_j^{(k)}/\delta_j^{(k)}\right)\right\} > -1, \forall j \in \{1, \ldots, m_k\},$$

$$\forall \; k \in \{1, \ldots, r\};$$

(ii) $$\int_{\xi}^{\eta} g_1(t)\, I\left[z_1(t-\xi)^{-\in}(\eta-t)^{\nu_1}, z_2(\eta-t)^{\nu_2}, \ldots, z_r(\eta-t)^{\nu_\rho}\right] dt$$

$$= (\eta-\xi)^{\rho+\sigma+1} \sum_{K0}^{[N/M]} \Delta_1 \sum_{m'_1,\ldots,m'_r=0}^{\infty} h_1 \; I^{0,n+1}_{p_1+1,q_i+1:R} \begin{matrix} :(m_1+1, n_1) \\ :[p_i', q_i'+1 : R'] \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1(\eta-\xi)^{\nu_1-\in} \\ z_2(\eta-\xi)^{\nu_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r(\eta-\xi)^{\nu_\rho} \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} \left[-(\sigma+K+\sum_{l=1}^{r} v_l m'_1); \nu_1, \ldots, \nu_r\right] \\ \left[-(\rho+\sigma+K+1+\sum_{l=1}^{r}(u_l+v_l)m'_l); \nu_1-\in, \nu_2, \ldots, \nu_r\right] : \\ \left[(\rho+1+\sum_{l=1}^{r} m'_l v_l), \in\right] \end{matrix}\right], \tag{2.2}$$

$$\nu_1 > \in > 0, \nu_k > 0, \mathrm{Re}(\rho) > \in \min\{\mathrm{Re}(d'_j/\delta'_j)\} - 1,$$

$$\mathrm{Re}(\sigma) + \sum_{k=1}^{r} \min\{\mathrm{Re}(d_j^{(k)}/\delta_j^{(k)})\} > -1$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, r\}, \forall j \in \{1, \ldots, m_k\};$$

(iii) $$\int_{\xi}^{\eta} g_1(t)\; I\left[z_1(t-\xi)^{\mu_1}(\eta-t)^{\gamma}, z_2(t-\xi)^{\mu_2}, \ldots, z_r(t-\xi)^{\mu_r}\right] dt$$

$$= (\eta-\xi)^{\rho+\sigma+1} \sum_{K=0}^{[N/M]} \Delta_1 \sum_{m'_1,\ldots,m'_r=0}^{\infty} h_1 \; I^{0,n+1}_{p_i+1,q_i+1} \begin{matrix} :(m_1+1, n_1) \\ :[p_i', q_i'+1 : R'] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1(\eta-\xi)^{\mu_1-\gamma} \\ z_2(\eta-\xi)^{\mu_2} \\ \vdots \\ z_r(\eta-\xi)^{\mu_r} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{matrix} \left[-(\rho+\sum_{l=1}^{r} u_l m'_l);\mu_1,\ldots,\mu_r\right] \\ \left[-(\rho+\sigma+K+1+\sum_{l=1}^{r}(u_l+v_l)m'_l);\mu_1-y,\mu_2,\ldots,\mu_r\right]: \\ \left[(\sigma+K+1+\sum_{l=1}^{r} v_l\, m'_l),\gamma\right] \end{matrix}\right] \qquad (2.3)$$

$$\mu_1>\gamma>0,\ \mu_k>0,\ \mathrm{Re}(\rho)+\sum_{k=1}^{r}\mu_k \min\left\{\mathrm{Re}(d_j^{(k)}/\delta_j^{(k)})\right\},$$

$$\mathrm{Re}(\sigma)>\gamma\min\{d'_j/\delta'_j)\}-1,\ \forall j\in(1,\ldots,m_k),\ \forall k\in(1,\ldots,r\};$$

(iv)
$$\int_{\xi}^{\eta} g_1(t)\, I\left[z_1(t-\xi)^{-\epsilon}(\eta-t)^{-\gamma},z_2,\ldots,z_r\right]dt$$

$$=(\eta-\xi)^{\rho+\sigma+1}\sum_{K=0}^{[N/M]}\Delta\sum_{m'_1,\ldots,m'_r=0}^{\infty} h_1\, I^{0,n\ :(m_1+2,n_1)}_{p_i,q_i:R\ :[p_i'+1,q_i'+2:R']}\begin{bmatrix} z_1(\eta-\xi)^{-\gamma-\epsilon} \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\rho+\sigma+K+2+\sum_{l=1}^{r}(u_l+v_l)\,m'_l\right),\gamma+\epsilon\end{array}\right]$$
$$\left.\left[\left(\rho+1+\sum_{l=1}^{r}u_l\,m'_l\right),\epsilon\right],\left[\left(\sigma+K+1+\sum_{l=1}^{r}v_l\,m'_l\right),\gamma\right]\right], \tag{2.4}$$

$\gamma>0,\epsilon>0,\mathrm{Re}(\rho)>\epsilon\min\{\mathrm{Re}(d'_j/\delta'_j)\}-1,\forall$

$j\in\{1,\ldots,m_k)\,\mathrm{Re}(\sigma)>\gamma\min\{\mathrm{Re}(d'_j/\delta'_j)\}-1:$

(v) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}g_2(\tau)\left[z_1(\tau+s)^{-\mu_1},\ldots,z_r(\tau+s)^{-\mu_r}\right]d\tau$$

$$=W^{\rho-1}e^{-WS}\sum_{K=0}^{[N/M]}\Delta_2\sum_{m'_1,\ldots,m'_r=0}^{\infty}h_2\,I^{0,n}_{p_i,q_i+1:R}\begin{bmatrix}z_1W^{\mu_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ z_rW^{\mu_r}\end{bmatrix}$$

$$\left[-\left(\rho+K-1+\sum_{l=1}^{r}\rho_l\,m'_l\right):\mu_1,\ldots,\mu_r\right] \tag{2.5}$$

$\mu_k>0$, तथा $\mathrm{Re}(\rho)>-\tau\sum_{k=1}^{r}\mu_k,\forall\,k\in\{1,\ldots,r\}:$

(vi) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}g_2(\tau)\quad I\left[z_1(\tau+s)^{\mu_1},\ldots,z_r(\tau_+s)^{\mu_r}\right]d\tau$$

$$=W^{\rho-1}e^{WS}\sum_{K=0}^{[N/M]}\Delta_2\sum_{m'_1,\ldots,m'_r=0}^{\infty}h_2\,I^{0,n}_{p_i+1,q_i:R}$$

$$\times \begin{bmatrix} z_1 W^{-\mu_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r W^{-\mu_r} \end{bmatrix} \ldots, \left[(\rho + K + \sum_{l=1}^{r} \rho_l m'_l) \mu_1, \ldots, \mu_r \right] \Bigg] \quad (2.6)$$

$\mu_k > 0$, तथा $\mathrm{Re}(\rho) > \tau \sum_{k=1}^{r} \mu_k, \forall k \in (2, \ldots, r r)$;

बशर्ते

$U_k \leq 0$; $|arg(z_k)| < 1/2\, V_k\ \pi$, $\forall\ k \in \{1, \ldots, r\}$,

जहाँ

$$U_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} + \sum_{j=n+1}^{P_i} \alpha_{ji}^{(k)} + \sum_{j=1}^{n_k} \gamma_{ji}^{(k)} + \sum_{j=n_k+1}^{p_i(k)} \gamma_{ji}^{(k)}(k) - \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ji}^{(k)} - \sum_{j=1}^{(k)} - \sum_{j=1}^{m_k} \delta_j^{(k)}$$

$$- \sum_{j=m_k+1}^{q_i(k)} \delta_{ji}^{(k)}(k) \leq 0, \quad (2.7)$$

$$V_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} - \sum_{j=n+1}^{P_i} \alpha_{ji}^{(k)} + \sum_{j=1}^{n_k} \gamma_j^{(k)} - \sum_{j=n_k+1}^{p_i(k)} \gamma_{ji}^{(k)}(k) - \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ji}^{(k)} + \sum_{j=1}^{(k)} - \sum_{j=1}^{m_k} \delta_j^{(k)}$$

$$- \sum_{j=m_k+1}^{q_i(k)} \delta_{ji}^{(k)}(k) > 0, \quad (2.8)$$

$\forall\ i \in \{1, \ldots, R\}, \forall\ i^{(k)} \in \{1, \ldots, R^{(k)}\}, \forall k \in \{1, \ldots, r\}$

उपपत्ति

(2.1), (2.2), (2.3) तथा (2.4) को सिद्ध करने के लिए हम सर्वप्रथम I- फलन की परिभाषा का प्रयोग करते हैं तथा समाकलन का क्रम बदल कर प्रेमयिका (1.19) का प्रयोग करके आन्तरिक समाकलन का मान निकालते हैं। इस तरह वांछित परिणाम मिलता है।

इसी तरह प्रमेयिका (1.20) का प्रयोग करके हम अन्य दो समाकलों (2.5) तथा (2.6) को भी स्थापित कर सकते हैं।

टिप्पणी

चूंकि बहुपदों की सामान्य श्रेणी, लौरिसेला फलन, बहुचर I - फलन अत्यन्त सर्वीकृत हाइपर-ज्यामितीय फलन हैं इसलिए इसमें तमाम बहु-ज्ञात विश्लेषिक फलन विशिष्ट दशाओं के रूप में निहित हैं।

निर्देश

1. अहमद, एस० एस०, पी० एच-डी, थीसिस, अवधेश प्रताप सिंह युनिवर्सिटी रीवाँ, 1992
2. सक्सेना, वी० पी०, **प्रोसी नेश० एके० साइंस इंडिया,** 1982, 52(A), 366-365
3. शर्मा, सी० के० तथा अहमद, एस० एस० (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)
4. शर्मा, सी० के० तथा मिश्रा, पी० एल०, **एक्टा सिंसिया इंडिया**, 1991, 17, M 4, 667-672
5. श्रीवास्तव, एच० एम०, **इंडियन जर्न० मैथ०** 1972, 14, 1-6
6. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा डौस्ट, एम० सी०, Nederd. Akad. Wetench. Proc., 1969, (A) 72 Indiag Math. 31, 449-457.
7. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, Math. Comp. 1975, 29, 1116-1128.
8. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा सिंह, एन० पी०, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1983, 11 32, 157-187.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 2, April 1997.

बालू/ग्रेवल का सड़क निर्माण में उपयोग

ई० आर० आर्य तथा एच० सी० हरित

केन्द्रीय सड़क अनुसन्धान संस्थान, दिल्ली-मथुरा रोड, नई दिल्ली-20

[प्राप्त-फरवरी 15, 1995]

सारांश

डामर के साथ बालू/ ग्रेवल का ऐसा अनुपात खोज निकाला गया है जो बीस मिमी० मोटे पूर्वमिश्रित कार्पेट की तुलना में अधिक उपयुक्त है।

Abstract

Use of sand/gravel in road construction. *By* I. R. Arya and H. C. Harit, Central Road Research Institute, Delhi-Mathura Road, P. O. CRRI, New Delhi-20.

A new proportion of sand /gravel along with asphalt has been found which can be used with greater efficiency than 20 mm thick pre-mixed carpet.

देश के कुछ भागों में बालू और ग्रेवल प्रचुर मात्रा में पाये जाते हैं। इनका प्रयोग सड़क निर्माण में किया जाता है। इनको सड़क निर्माण में प्रयोग करके टूटी हुई रोड़ी को दूर से लाने का व्यय बचाया जा सकता है। इनसे बनी सड़कों पर मध्यम आयतन वाले वाणिज्यिक वाहन आसानी से चलाये जा सकते हैं अर्थात् इनसे बनी सड़कें मध्यम आयतन वाले वाणिज्यिक वाहनों के लिए उपयुक्त हैं। मध्यम आयतन वाले वाणिज्यिक वाहनों के लिए सड़कों पर 20-25 मिमी० मोटाई की सेमीडेन्स एसफाल्टिक कंक्रीट उपयुक्त पायी गयी है। इसलिये बालू/ग्रेवल से सड़क निर्माण में ग्रेवल को 12.5 मिमी० वाली छलनी से छान कर ऊपर का ग्रेवल फेंक दिया जाता है अर्थात् 12.5 मिमी० से बड़े ग्रेवल के टुकड़ों को निकाल दिया जाता है।

वर्तमान में बालू / ग्रेवल मिश्रण के लिए अभिकल्प की दो विधियाँ प्रचलन में हैं परन्तु दोनों विधियों का अभिकल्प उपयुक्त नहीं है। इन दोनों पदार्थों से सड़क निर्माण के लिए मुख्य समस्या है इनके अनुपात ज्ञात करना। यदि इनका अनुपात ठीक नहीं होगा तो इनसे बना अभिकल्प भी ठीक नहीं होगा।

विधि (1)

इस विधि में ज्ञात आयतन के डिब्बे में बालू डालकर बाहर से एक लोहे की छड़ द्वारा टन-टन किया जाता है। ऐसा करने से बालू डिब्बे में जाकर ग्रेवल की रिक्तियों में भर जाती है। यह क्रिया तब तक चलती रहती है, जब तक ग्रेवल में बालू पूर्ण रूप से भर जाती है। इसके बाद ग्रेवल और बालू का भार ज्ञात कर लिया जाता है। दोनों के अंतर से बालू की मात्रा ज्ञात कर ली जाती है। दोनों का अलग-अलग भार ज्ञात होने पर उनका अनुपात प्राप्त कर लेते हैं। इस प्रकार दोनों के अनुपात ज्ञात करने में प्रयोगशाला में देखा गया है कि बालू की कुछ मात्रा ज्ञात आयतन वाले डिब्बे की तली में होती है। इस प्रकार दोनों पदार्थों का अनुपात ठीक से ज्ञात नहीं होता। यह इस विधि का दोष है। इसके पश्चात् बालू और ग्रेवल के अनुपात को लेकर ए० एस० टी० एम-159 अनुसार मार्शल के नमूने बनाकर उनका घनत्व और स्थायित्व ज्ञात करके बन्धक (डामर) की इष्टतम मात्रा ज्ञात कर ली जाती है। डामर की इष्टतम मात्रा के लिये मिश्रण के गुण ज्ञात कर लिये जाते हैं ।

विधि (2)

इस विधि में बालू/ग्रेवल से 0 : 100, 10 : 90, 20 : 80, 30 : 70, 40 : 60, 50 : 50 60 : 40, 70:30, 80 : 20, 90 : 10 और 100 : 0 अनुपातों को लेकर प्रत्येक मिश्रण के ए० एस० टी० एम०-1559 अनुसार इष्टतम डामर के लिए घनत्व और स्थायित्व ज्ञात करते हैं। इसके पश्चात् बालू /ग्रेवल के मिश्रण के अनुपात, घनत्व तथा स्थायित्व से रेखाचित्र बनाकर अधिकतम घनत्व और मार्शल स्थायित्व के लिए बालू/ ग्रेवल का अनुपात ज्ञात किया जाता है। इस विधि का दोष है कि बालू और ग्रेवल के प्रत्येक अनुपात के लिये पूरा अभिकल्प करना पड़ता है अर्थात् लंबी प्रक्रिया द्वारा बालू/ ग्रेवल का अनुपात ज्ञात किया जाता है। इस विधि में दोनों का अनुपात ज्ञात करने के लिये ग्यारह बार अभिकल्प करना पड़ता है।

उपर्युक्त दोनों विधियों के दोषों को देखते हुए यह आवश्यक माना गया है कि एक नयी विधि का विकास किया जावे।

प्रयोगात्मक

नयी विधि का विकास करने के लिये बनारस, धामपुर, और अलेप्पी से बालू और ग्रेवल के नमूने लेकर उनका परीक्षण प्रयोगशाला में किया गया। इनके भौतिक गुण सारणी 1 में तथा इनका वर्गीकरण सारणी 2 में दर्शाया गया है।

सारणी 1

बालू और ग्रेवल के भौतिक गुण

भौतिक गुण	बनारस		धामपुर		अलेप्पी	
	बालू	ग्रेवल	बालू	ग्रेवल	बालू	ग्रेवल
संहनन मान, प्रतिशत	-	11	*	30	-	26
जल शोषण, प्रतिशत	-	0.5	-	1.0	-	0.7
आपेक्षिक घनत्व	2.62	2.70	2.72	2.67	2.70	2.60
एकक भार, कि०ग्रा०/मीटर^3	1442	1672	1580	1553	1630	1592

सारणी 2

बालू और ग्रेवल के वर्गीकरण
अतिक्रमण प्रतिशत

छलनी माप	बनारस		धामपुर		अलेप्पी	
	बालू	ग्रेवल	बालू	ग्रेवल	बालू	ग्रेवल
12.5 मि०मी०	-	100	-	100	-	100
10 मि०मी०	-	94	-	65	-	82
4.75 मि०मी०	-	53	-	5	-	11
2.36 मि०मी०	-	-	100	-	100	-
600 माइक्रान	100	-	31	-	74	-
300 माइक्रान	92	-	10	-	49	-
150 माइक्रान	5	-	2	-	7	-
75 माइक्रान	1	-	-	-	-	-

बालू और ग्रेवल का अनुपात ज्ञात करना

		बनारस	धामपुर	अलेप्पी
ग्रेवल	अपेक्षिक घनत्व	2.7	2.67	2.6
	एकक भार	1672	1553	1592
	प्रतिशत आयतन	$\frac{1672}{2.7} = 61.9$	$\frac{1553}{2.67} = 58.2$	$\frac{1592}{2.6} = 61.2$
	रिक्तियों का प्रतिशत आयतन	100-61.9 = 38.1	100-58.2 = 41.8	100-61.2 = 38.8
बालू	आपेक्षिक घनत्व	2.62	2.72	2.7
	एकक भार	1442	1580	1630
	प्रतिशत आयतन	$\frac{1442}{2.62} = 55.0$	$\frac{1580}{2.72} = 58.1$	$\frac{1630}{2.7} = 60.4$

सेमीडेन्स एस्फाल्टिक कंक्रीट में रिक्तियाँ 16-19 प्रतिशत अर्थात् 17.5 प्रतिशत होती हैं। इनको भरने के लिये बालू की मात्रा निम्न प्रकार ज्ञात करके बालू / ग्रेवल का अनुपात ज्ञात करते हैं-

ग्रेवल में 17.5% रिक्तियों को भरने के लिए बालू की मात्रा	$\frac{55 \times 17.5}{38.1}$ =25	$\frac{58.1 \times 17.5}{38.1}$ =24	$\frac{60.4 \times 17.5}{38.1}$ =27
ग्रेवल की मात्रा	100-25 =75	100-24 =76	100-27 =73
बालू:ग्रेवल	25:75	24:76	27:73

तीनों स्थानों के बालू/ग्रेवल के प्राप्त अनुपातों के मान की सेमीडेन्स एस्पाल्टिक कंक्रीट निर्देशित वर्गीकरण से तुलना सारणी 3 में दर्शायी गई है।

सारणी 3

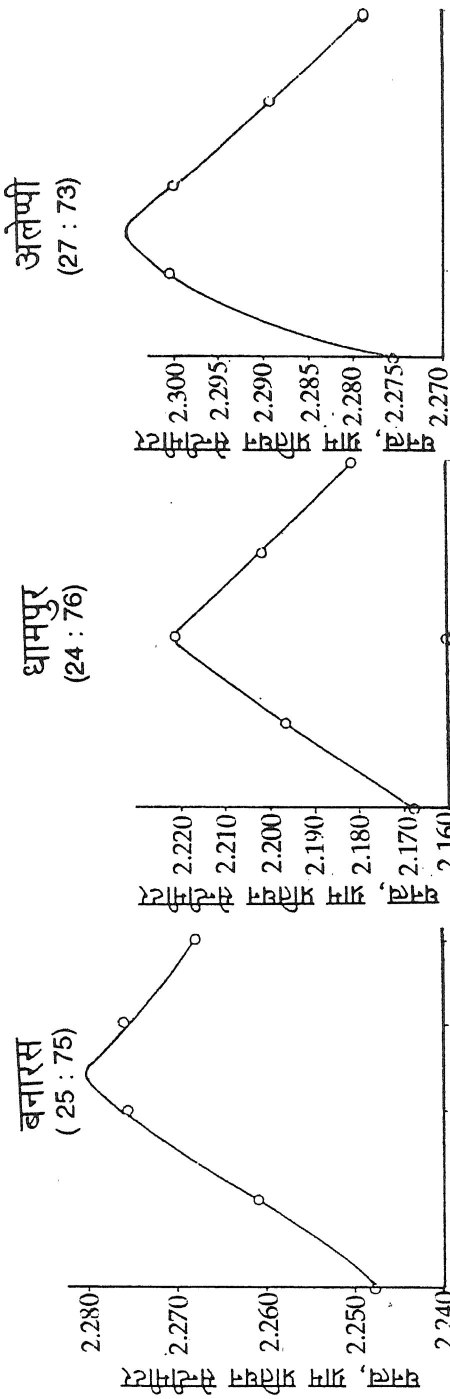
अतिक्रमण, प्रतिशत

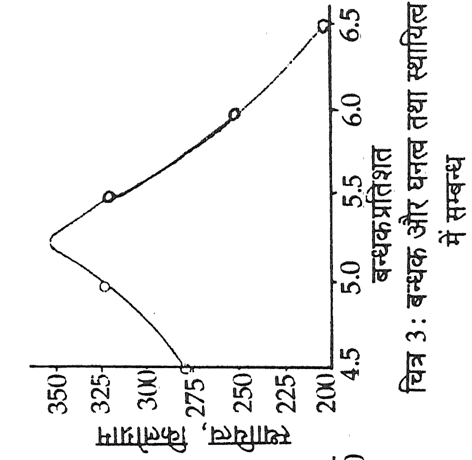
छलनी माप	बनारस	धामपुर	अलेप्पी	निर्देशित वर्गीकरण
	25:75	24:76	27:73	-
12.5 मि०मी०	100	100	100	10
10 मि०मी०	96	73	87	75—100
4.75 मि०मी०	65	28	35	35—55
2.36 मि०मी०	25	24	27	20—35
600 माइक्रान	25	7	20	10—22
300 माइक्रान	23	2	13	6—16
150 माइक्रान	1	1	2	4—12
75 माइक्रान	-	-	-	2—8

उपर्युक्त सारणी को देखने से ज्ञात होता है कि कुछ छलनियों को छोड़कर तीनों स्थानों के बालू/ ग्रेवल के अनुपातों का मान निर्देशित वर्गीकरण को संतुष्ट करता है इसलिए इनको सेमीडेन्स एसफाल्टिक कंक्रीट के लिए ठीक माना जा सकता है।

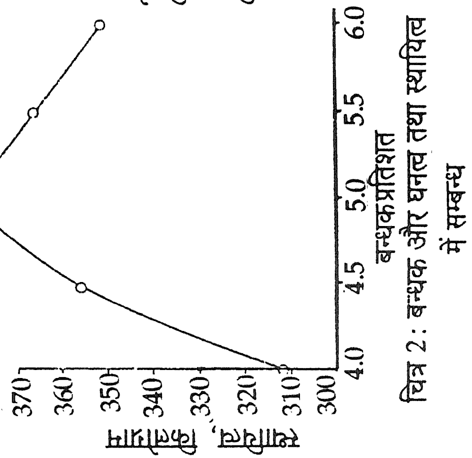
तीनों स्थानों के बालू/ ग्रेवल के अनुपातों को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक स्थान के अनुपात से 1100 ग्राम बालू/ ग्रेवल मिश्रण के समूह बनाये और इनसे मार्शल नमूने ए० एस० टी एम- 1559 के अनुसार डामर का तापक्रम 160-165 से० रखा गया। डामर के प्रत्येक प्रतिशत से मार्शल के तीन-तीन नमूने बनाये गये। ठंडा होने पर इन नमूनों का वायु तथा पानी में भार ज्ञात करके घनत्व निकाला गया। इसके बाद इन नमूनों को 600 से० ग्रे० के पानी में 30 मिनट रखने के बाद मार्शल मशीन से उनका मार्शल स्थायित्व निकाल लिया गया। तीन-तीन नमूनों के घनत्व और मार्शल स्थायित्व का औसत निकाला गया।

घनत्व/ प्रतिशत डामर, स्थायित्व/प्रतिशत डामर के लिए तीनों स्थानों को ध्यान में रखते हुए चित्र (1), (2) (3) बनाए। चित्रों की सहायता से अधिकतम घनत्व और मार्शल स्थायित्व के लिए डामर की इष्टतम मात्रा ज्ञात कर ली गयी। फिर इष्टतम मात्रा के लिए शिक्षण के गुण निकालना आवश्यक है क्योंकि सड़क निर्माण में ये गुण "गुण निर्धारण" में सहायक होते हैं।

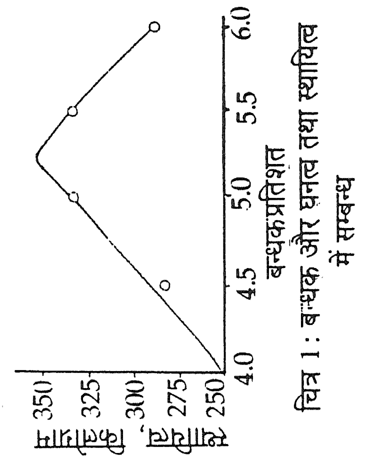




चित्र 3 : बन्धक और घनत्व तथा स्थायित्व में सम्बन्ध



चित्र 2 : बन्धक और घनत्व तथा स्थायित्व में सम्बन्ध



चित्र 1 : बन्धक और घनत्व तथा स्थायित्व में सम्बन्ध

सारणी 4 में तीनों स्थानों के डामर, बालू और ग्रेवल के मिश्रण के इष्टतम डामर की मात्रा के लिये गुण दर्शाये गये हैं।

सारणी 4

गुण	बनारस	धामपुर	अलेप्पी
बालू/ग्रेवल	25:75	24:76	27:73
डामरीय मिश्रण का घनत्व	2.280	2.220	2.310
डामर की इष्टतम मात्रा, प्रतिशत	5.25	5.0	5.25
मार्शल स्थायित्व, कि० ग्रा०	350	380	350
प्रतिशत रिक्तियाँ	7.8	10.6	4.9

परिणाम एवं विवेचना

बनारस, धामपुर और अलेप्पी के बालू/ग्रेवल के अनुपातों से अभिकल्प करने पर डामर की इष्टतम मात्रा क्रमशः 5.25, 5.0, 5.25 प्रतिशत है। संहत मिश्रण में रिक्तियाँ 5-10 प्रतिशत के परिसर में हैं और स्थायित्व क्रमशः 350, 380 और 350 किग्रा० है। ये सब गुण सेमीडेन्स एसफाल्टिक कंक्रीट के लिए निर्देशित गुणों से मेल खाते हैं। उल्लेखनीय है कि बालू /ग्रेवल के वर्गीकरण तीनों स्थानों के लिए प्राकृतिक हैं फिर भी इनके डामरीय मिश्रण के गुण समीडेन्स एसफाल्टिक कंक्रीट के लिए निर्देशित गुणों से मेल खाते हैं इसलिए इन तीनों मिश्रणों को सेमीडेन्स एसफाल्टिक कंक्रीट के स्थान पर प्रयोग में लाया जा सकता है।

बालू/ ग्रेवल तथा डामर के मिश्रण को सड़क निर्माण में प्रयोग करने के लिये कुट्टिम की मोटाई 25 मिमी० रखी जा सकती है क्योंकि ग्रेवल का अधिकतम माप 12.5 मिमी० है। ऐसा भारत सरकार के परिवहन मंत्रालय के सड़क-सेतु पक्ष द्वारा निर्दिष्ट किसी भी पृष्ठ के लिये वर्गीकृत रोड़ी तथा पृष्ठ की मोटाई में 1/2 से 1/3 का अनुपात प्रतिपादित है। परीक्षणों से देखा गया है कि बालू /ग्रेवल के 25 मिमी० मोटे डामरीय मिश्रण का टिकाऊपन 20 मिमी० पूर्व मिश्रित कारपेट से अधिक है।

निष्कर्ष

1. इस नयी विधि से बालू और ग्रेवल के अनुपात सरलता से प्राप्त किए जा सकते हैं।
2. पहले से प्रयोग में लाई जा रही विधियों से यह नयी विधि सरल है।
3. जिन स्थानों पर बालू / ग्रेवल प्रचर मात्रा में उपलब्ध है, सड़क निर्माण में प्रयोग में लाए जा सकते हैं।

4. अधिक दूर से रोड़ी लाने का व्यय बचाया जा सकता है।

5. मध्यम औसत के वाणिज्यिक वाहन के लिए बालू/ ग्रेवल से सड़क निर्माण किया जा सकता है।

6. इसके द्वारा बनायी गयी सड़कें 20 मिमी० मोटी पूर्वमिश्रित कारपेट से टिकाऊ होती है।

7. बालू/ ग्रेवल के डामरीय मिश्रण की तुलना सेमीडेन्स एसफाल्टिक कंक्रीट से की जा सकती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय केन्द्रीय सड़क अनुसंधान संस्थान, नई दिल्ली के निदेशक महोदय के आभारी हैं जिन्होंने इस शोधपत्र को प्रकाशित कराने की स्वीकृति प्रदान की।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 2, April 1997.

मध्य प्रदेश के बुन्देलखण्ड क्षेत्र में गेहूँ की उन्नत एवं स्थानीय कास्त का तुलनात्मक आर्थिक विश्लेषण

आर० के० जैन, आर० एस० रघुवंशी,
आर० के० एस० तोमर, तथा आर० सी० तिवारी

ज० ने० कृ० वि० वि० क्षेत्रीय कृषि अनुसंधान केन्द्र,
टीकमगढ़ (मध्य-प्रदेश)

[प्राप्त-अक्टूबर 20, 1995]

सारांश

बुन्देलखण्ड क्षेत्र में सिंचित गेहूँ के प्रति हैक्टेयर उत्पादन में उन्नत कास्त से स्थानीय कास्त की तुलना में 1671.44 कि० ग्रा० उपज (75.71 प्रतिशत) एवं 6813.14 रुपये सकल आय (74.19 प्रतिशत) अधिक प्राप्त हुई। इसी प्रकार लागत "अ" "ब" एवं 'स' पर भी क्रमशः 3075.40 (53.30%), 2653.96 (65.02%) तथा 4171.96 (162.72%) अधिक शुद्ध लाभ प्राप्त हुआ। स्थानीय कास्त से कम लाभ होने का प्रमुख कारण उन्नत कास्त की तुलना में रासायनिक उर्वरकों एवं सिंचाई पर क्रमशः 59.39 व 27.17 प्रतिशत व्यय कम होना है।

Abstract

Comparative economic analysis of improved vs local crop production technology of wheat in Bundelkhand zone of Madhya Pradesh. *By* R. K. Jain, R. S. Raghuwanshi, R. K. S. Tomar and R. C. Tiwari, J. N. K. V. V. Zonal Agricultural Research Station, Tikamgarh (M.P.).

In Bundelkhand zone of Madhya Pradesh, the per hectare crop production of irrigated wheat showed that the improved technology gave higher yield of 1671.44 Kg. (75.71%) and higher gross income

of Rs. 6813.14 (74.19%) than the local technology. It also gave higher net profit of Rs. 3075.40 (53.30%), 2653.96 (65.02%) and 4171.96 (162.72%) on cost 'A' 'B' and 'C' respectively. The main reason of less profit in local technology was 59.39 and 27.17 precent less expenditure on fertilizers and irrigation respectively.

मध्य प्रदेश में हरित क्रान्ति के बाद से रबी खाद्यान्न उत्पादन में गेहूँ का महत्वपूर्ण योगदान रहा है। प्रदेश में कुल रबी खाद्यान्न का 51.23 प्रतिशत क्षेत्रफल एवं 68.52 प्रतिशत उत्पादन गेहूँ से प्राप्त होता है। प्रदेश के बुन्देलखण्ड कृषि जलवायु क्षेत्र में सिंचित रकबा 36.84 प्रतिशत एवं असिंचित रकबा 63.16 प्रतिशत (कुल कास्त रकबे का) है। गेहूँ की कास्त में 53.76 प्रतिशत क्षेत्रफल (कुल रबी क्षेत्रफल का) आता है, परन्तु प्रति हैक्टेयर उपज 1771 किलोग्राम प्राप्त हो रही है जो कि अभी भी कम है। सिंचित क्षेत्र में उन्नत तकनीकी से गेहूँ की कास्त करने पर लागत खर्च में 64.49 प्रतिशत की वृद्धि हुई है।[1] अतः सुप्रबन्ध एवं अनुकूलित वातावरण में उन्नत तकनीक से अधिक उत्पादन होता है। उत्पादकता में वृद्धि करना हमारा उद्देश्य है परन्तु उन्नत तकनीक का आर्थिक दृष्टि से मूल्यांकन करना जरूरी है। यह अध्ययन अर्थमिति को ध्यान में रखकर स्थानीय एवं उन्नत तकनीकी से गेहूँ उत्पादन की तुलना के लिये बुन्देलखण्ड क्षेत्र में किया जा रहा है। इस अध्ययन का मूल उद्देश्य स्थानीय एवं उन्नत कास्त से उत्पादन लागत, खर्च एवं लाभ में अंतर ज्ञात करना है।

प्रयोगात्मक

यह शोध अध्ययन मध्य प्रदेश के बुन्देलखण्ड कृषि जलवायु क्षेत्र में वर्ष 1994-95 में किया गया। अध्ययन के लिये क्षेत्रीय कृषि अनुसंधान केन्द्र टीकमगढ़ के निकट के तीन गाँवों से 60 कृषक परिवारों को चुना गया एवं इनकी तुलना अनुसंधान केन्द्र पर सिंचित गेहूँ पर हुये परीक्षणों से औसत आधार पर किया गया। चयनित कृषकों से व्यक्तिगत सम्पर्क द्वारा साक्षात्कार करके फसल के आय-व्यय के आँकड़े एकत्र किये गये। विभिन्न उत्पादन लागत वस्तुओं की कीमत और उत्पाद मूल्य का आकलन स्थानीय बाजार भाव के अनुसार किया गया। शुद्ध आय एवं व्यय के अनुपात की गणना हेतु लागत ''अ'' ''ब'' एवं ''स'' संकल्पना का उपयोग किया गया।[2]

लागत ''अ'' = मजदूरी पर मानव श्रम + पशु श्रम + बीजों की कीमत + खाद एवं उर्वरकों की कीमत + सिंचाई पर व्यय + फसल सुरक्षा पर व्यय + चल पूँजी पर ब्याज* + ह्रास तथा मरम्मत**।

लागत ''ब'' = लागत ''अ'' + भूमि का किराया मूल्य + अचल पूँजी पर ब्याज***

लागत ''स' = लागत ''ब'' + पारिवारिक मानव श्रम

---

* 12.5 प्रतिशत की दर से फसल समय से आधे फसल समय पर ज्ञात किया गया।

** ह्रास एवं मरम्मत बैल जोड़ी श्रम घंटों का क्रमशः 0.06 एवं 0.10 प्रतिशत [3] पर ज्ञात किया गया।

*** बैल जोड़ी श्रम घंटों का 0.05 प्रतिशत पर ज्ञात किया गया।

विभिन्न उत्पादन लागतों के औसत प्रयोग में अन्तर का सांख्यिकीय दृष्टि से सार्थकता का परीक्षण फिशर के "टी परीक्षण" द्वारा किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

गेहूँ की उन्नत एवं स्थानीय कास्त तकनीक में प्रयोग की गई विभिन्न आगतों एवं उन्नत कास्त तकनीक की तुलना में स्थानीय कास्त तकनीक में प्रतिशत अंतर का विवरण सारणी-1 में दिया गया है।

सारणी 1

गेहूँ की उन्नत एवं स्थानीय कास्त में लगने वाली विभिन्न आगतों का विवरण

(राशियाँ प्रति हे० में)

लागत का नाम	इकाई	उन्नत कास्त तकनीक	स्थानीय कास्त तकनीक	उन्नत कास्त तकनीक की तुलना में स्थानीय कास्त में प्रतिशत अंतर
पारिवारिक मानव श्रम	मानव दिवस	-	60.72	100.00*
मजदूरी पर मानव श्रम	मानव दिवस	91.00	16.12	(-) 82.29*
पशु श्रम	बैल जोड़ी दिवस	25.00	21.40	(-) 14.40*
बीज	कि० ग्रा०	100.00	106.37	6.37*
रासायनिक खाद				
नाइट्रोजन	कि०ग्रा०	120.00	65.10	(-) 45.75*
फास्फोरस	कि०ग्रा०	60.00	23.57	(-) 60.72*
पोटाश	कि० ग्रा०	40.00	-	(-) 100.00*

*5 प्रतिशत प्रायिकता स्तर पर सार्थक

उन्नत कास्त तकनीक का परीक्षण क्षेत्रीय कृषि अनुसंधान केन्द्र पर किया गया जिसमें पारिवारिक श्रम बिल्कुल नहीं किया गया, जबकि स्थानीय कास्त तकनीक में पारिवारिक श्रम का प्रयोग अधिक हुआ। उन्नत कास्त में सम्पूर्ण मानव श्रम मजदूरी पर हुआ जबकि स्थानीय कास्त में इसकी तुलना में 82.29 प्रतिशत कम मानव श्रम मजदूरी पर हुआ और यह अंतर सांख्यिकीय दृष्टि से 5 प्रतिशत सम्भाव्यता स्तर पर सार्थक पाया गया। उन्नत कास्त की तुलना में स्थानीय कास्त में 14.40 प्रतिशत

सारणी 2

गेहूँ की स्थानीय एवं उन्नत कास्त लागत(रुपये प्रति हेक्टेयर)

मद विवरण	उत्पादन तकनीकि		उन्नत तकनीकि की तुलना में स्थानीय तकनीकि में % अन्तर
	स्थानीय	उन्नत	
1. मानव श्रम (किराये पर)	403.00 (6.09)	2275.00 (24.57)	-82.29
2. पशु श्रम	1070.00 (16.16)	1250.00 (13.50)	-14.40
3. बीज	503.00 (7.60)	640.00 (6.91)	-21.41
4. रासायनिक खाद	852.00 (12.87)	2098.00 (22.65)	-59.39
5. सिंचाई	437.00 (6.60)	600.00 (6.48)	-27.17
6. फसल सुरक्षा	18.00 (0.27)	40.00 (0.43)	-55.00
7. चल पूँजी पर ब्याज	102.59 (1.55)	215.72 (2.33)	-52.44
8. ह्रास तथा मरम्मत	27.39 (0.41)	32.00 (0.35)	-14.41
सकल लागत अ	3412.98 (51.55)	7150.72 (77.22)	-52.27
9. भूमि का किराया मूल्य	1680.00 (25.38)	2100.00 (22.68)	-20.00
10. अचल पूँजी पर ब्याज	8.56 (0.13)	10.00 (0.10)	-14.40
सकल लागत ब	5101.64 (77.06)	9260.72 (100.00)	-44.91
11. पारिवारिक श्रम	1518.00 (22.94)	0.00 (0.00)	100.00
सकल लागत स	6619.54 (100.00)	9260.72 (100.00)	-28.52

(कोष्ठक में दर्शाये गये आँकड़े सकल लागत "स" की प्रतिशतता दर्शाते हैं)

कम पशुश्रम का प्रयोग किया गया। बीज की मात्रा के प्रयोग में सार्थक अंतर नहीं पाया गया। जहाँ तक उर्वरकों के प्रयोग का प्रश्न है स्थानीय कास्त तकनीकी में नाइट्रोजन, फास्फोरस तथा पोटाश का क्रमशः 45.75, 60.72 एवं 100.00 प्रतिशत कम प्रयोग किया गया जो कि सांख्यिकीय दृष्टि से सार्थक अंतर है। यह भी उल्लेखनीय है कि स्थानीय तकनीक में पोटाश का प्रयोग बिल्कुल ही नहीं किया गया।

लागत वर्गीकरण लागत संकल्पना के आधार पर किया गया है। स्थानीय एवं उन्नत कास्त में प्रयुक्त लागत खर्च का तुलनात्मक विवरण सारणी-2 में दिया गया है। यह स्पष्ट है कि उन्नत कास्त की तुलना में स्थानीय कास्त में मानव श्रम, पशु श्रम, बीज, रासायनिक खाद, सिंचाई एवं फसल सुरक्षा पर अपेक्षाकृत काफी कम व्यय किया गया। इस प्रकार उन्नत कास्त तकनीक में लागत "अ" 7150.72 रु० है० और लागत "ब" तथा "स" 9260.72 रुपये प्रति हैक्टेयर आँकी गयी जबकि स्थानीय कास्त में लागत "अ" "ब" एवं "स" क्रमशः 3412.98, 5101.54 तथा 6619.54 रुपये आँकी गयी जो उन्नत कास्त की अपेक्षा 28.52 से 52.27 प्रतिशत तक है।

गेहूँ की स्थानीय एवं उन्नत कास्त तकनीकी द्वारा प्राप्त प्रति हेक्टेयर उपज एवं आय का ब्यौरा सारणी 3 में दिया गया है। गेहूँ की उन्नत तकनीकी द्वारा कास्त में प्रबन्ध की अच्छी व्यवस्था होने के कारण उपज 3879 किलोग्राम प्रति हेक्टेयर पायी गयी जबकि स्थानीय तकनीकी द्वारा कास्त करने पर इसकी उपज 2207.56 कि० ग्रा० प्राप्त हुई, फलतः उन्नत कास्त में स्थानीय कास्त की तुलना में लगभग 75.71 प्रतिशत अधिक उपज रही। इस प्रकार गेहूँ उत्पादन से प्राप्त होने वाली सकल आय क्रमशः स्थानीय कास्त एवं उन्नत कास्त में 9183.46 और 15996.60 रु० प्रति हे० प्राप्त हुई जो कि स्थानीय कास्त की तुलना में लगभग 74.19 प्रतिशत अधिक है।

गेहूँ उत्पादन में शुद्ध आय लागत "अ" "ब" एवं "स" पर तीनों ही स्थितियों में लाभप्रद रहीं। उन्नत तकनीक से गेहूँ की कास्त करने पर स्थानीय कास्त की तुलना में शुद्ध लाभ, लागत "अ" "ब" एवं "स" पर क्रमशः 53.30, 65.02 तथा 162.72 प्रतिशत अधिक प्राप्त हुआ। गेहूँ की उन्नत एवं स्थानीय तकनीक द्वारा कास्त करने पर प्राप्त आय-व्यय का विवेचन करने से यह स्पष्ट होता है कि स्थानीय कास्त में कृषकों द्वारा उन्नत बीजों और उर्वरकों का संतुलित प्रयोग उचित सिंचाई प्रबन्ध एवं अन्य फसल प्रबन्ध का स्तर निम्न था जिसके कारण प्रति हे० लागत "अ" "ब" एवं "स" पर क्रमशः 5770.48. 4081.92 एवं 2563.92 रुपये शुद्ध लाभ प्राप्त हुआ। गेहूँ की उन्नत प्रजातियों, उर्वरकों के संतुलित प्रयोग, उचित सिंचाई एवं फसल प्रबन्ध के स्तर में सुधार कर उन्नत तकनीकी के स्तर पर लाया जाये तो किसान लागत "अ" "ब" "स" पर क्रमशः 8845.88 तथा 6735.88 रु० प्रति हे० तक शुद्ध लाभ प्राप्त कर सकते हैं।

गेहूँ की कास्त में प्रति रुपया विनियोजन से लागत अ पर स्थानीय एवं उन्नत कास्त में क्रमशः 2.46 एवं 2.24 रुपया प्राप्त हुआ जो कि स्थानीय की तुलना में 8.94% प्रतिशत कम है जिसका प्रमुख कारण स्थनीय कास्त तकनीक में मजदूरी की अपेक्षा पारिवारिक मानव श्रम का अधिक प्रयोग है। परन्तु लागत "ब" एवं "स" पर क्रमशः स्थानीय कास्त से 1.64 एवं 1.27 रुपये एवं उन्नत कास्त

से दोनों में 1.73 रुपये प्राप्त हो रहा है, यह लाभ स्थानीय कास्त की तुलना में क्रमशः 5.49 व 36.22 प्रतिशत अधिक है।

सारणी 3

गेहूँ की स्थानीय एवं उन्नत कास्त से प्रति हेक्टेयर आय

आय विवरण	उत्पादन तकनीकी स्थानीय	उन्नत	स्थानीय की तुलना में उन्नत कास्त से अतिरिक्त आय प्रतिशत में
उपज (कि० ग्रा० है०)			
1. अनाज	2207.56	3879.00	75.71
2. भूसा	2649.10	4188.00	58.09
आय (रु० है०)			
1. दाने की उपज से	8388.73	14740.20	75.71
2. भूसे से	794.73	1256.40	58.09
सकल आय	9183.46	15996.60	74.19
शुद्ध लाभ			
1. लाग "अ" पर	5770.48	8845.88	53.30
2. लागत "ब" पर	4081.92	6735.88	65.02
3. लागत "स" पर	2563.92	6735.88	162.72
प्रतिरुपया लागत पर आय			
1. लागत "अ" पर	2.46	2.24	—8.94
2. लागत "ब" पर	1.64	1.73	5.49
3. लागत "स" पर	1.27	1.73	36.22

निर्देश

1. गौतम, डी० एस० तथा पाण्डे, शैलेन्द्र कुमार, "कृषक जगत" जून, 1986 पृ० 708

2. त्रिपाठी, रामशंकर, भारतीय कृषि अनुसन्धान पत्रिका, 1992, 7(4), 229-234

3. ढौंढियाल, एस० पी०, "Farm management and Economic Analysis." फ्रेंड्स पब्लिकेशन मेरठ, 1989.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 2, April 1997.

किसी फलन का उसकी फूरियर-लागेर श्रेणी के आंशिक योगफलों द्वारा सन्निकटन

वी० के० गुप्ता, वन्दना गुप्ता, के० एल० जाट
तथा
कुमारी मोनिका लखवारा
शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, नीमच (म० प्र०)

[प्राप्त- अक्टूबर 15, 1996]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में किसी फलन की सन्निकटन कोटि का परिणाम उसके फूरियर-लागेर श्रेणी के आंशिक योगफलों के द्वारा सिद्ध किया गया है। इस परिणाम में हमने गुप्ता तथा मजहर के परिणामों की कोटि को प्राचल α, γ तथा p के लिए अपेक्षतया सरलतम सम्बन्ध लेकर सुधारा है

Astract

Approximation of a function by partial sums of its Fourier-Laguerre series. *By* V. K. Gupta, Vandana Gupta, K. L. Jat and Miss Monika Lakhwara, Govt. P. G. College, Neemuch (M.P.).

In the present paper we prove a result on the degree of approximation of a function by partial sums of its Fourier-Laguerre series.

In our result we improve the degree of the results of Gupta and Mazahars by taking comparatively simpler relationship in parameters α, γ and p.

1. प्रस्तावना

गुप्ता तथा मजहर[1] में जनक फलन पर लिपसिट्ज प्रतिबन्ध लगाकर फूरियर-लागेर श्रेणी के आंशिक योगफलों के माध्यम से सन्निकटन कोटि का अध्ययन किया है। उनकी परिभाषा के अनुसार

$$f(x) \in \text{Lip}(\gamma, p), \qquad 0 < \gamma \le 1,\ p \ge 1$$

यदि

$$\left(\int_0^t \left| \frac{F(y)}{y} \right|^p dy \right)^{1/p} = 0(1) \tag{1.1}$$

जहाँ पर a एक स्थिर संख्या है तथा $0 < t \le a$

$$F(y) = [f(y) - f(0)] \ \{ \Gamma(\alpha+1) \}^{-1}$$

हमने यह प्रदर्शित किया है कि यदि $f(x) \in \text{Lip}(\gamma, p)$ प्रत्येक अन्तराल $[O, w]$ में जहाँ w स्थिर संख्या है $0 < \gamma \le 1$, $p \ge 1$ तथा यदि

$$\int_w^\infty |F(y)| \exp(-y/2)\ dy < \infty \tag{1.2}$$

तो

$$|Sn(O) - f(O)| = O\left(n^{1/p-\gamma}\right) \tag{1.3}$$

बशर्ते कि α निम्नलिखित प्रतिबन्ध द्वारा सीमित हो

$$\alpha < \frac{2}{p} - \frac{1}{2} - 2\gamma, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad \alpha > \frac{1}{p} - 1 - \gamma$$

यहाँ यह उल्लेख कर दें कि प्राचल α, p तथा γ के परास स्वयं में विरोधी हैं। उदाहरणार्थ, यदि हम $\gamma = 1$ तथा $p = 1$ लें तो α के संगत परास

$$\alpha > -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \alpha < 1$$

तथा $\alpha > -1$ द्वारा व्यक्त किये जाते हैं जो कि असम्भव है।

इस अनुभाग में हम सन्निकटन कोटि का अध्ययन भिन्न दृष्टिकोण से फूरियर-लागेर श्रेणी के आंशिक योगफलों के द्वारा करेंगे। हम निम्नलिखित को सिद्ध करना चाहते है —

प्रमेय : यदि समाकल

$$\int_0^w \left| \frac{F(y)}{y^\gamma} \right|^p dy < \infty \tag{1.4}$$

प्रत्येक अन्तराल में $[0, w)$, जहाँ w एक स्थिर संख्या है, $0 < \gamma \leq 1, \frac{1}{\gamma} \leq p < \infty$
तथा $-1 < \alpha \leq -1/2$ और यदि

$$\int_w^\infty |F(y)| \exp(-y/2)\ dy < \infty \tag{1.5}$$

तो

$$|Sn(O) - f(O)| = A . \max\left(n^{\alpha/2 + 1/4},\ n^{1/p - \gamma} \right) \tag{1.6}$$

जहाँ A अचर है किन्तु आवश्यक नहीं है कि जहाँ भी आवे एक सा हो तथा

$$F(y) = [f(y) - f(O)]\ \{ \Gamma((\alpha + 1))\ \}^{-1}$$

2. परिभाषा : माना कि f ऐसा फलन है जो अन्तराल $[0, \infty]$ में इस तरह परिभाषित एवं लेबेस्क मापनीय है कि $\alpha > -1$ के लिए समाकल

$$\int_0^\infty \exp(-u)^\alpha u^\alpha f(u)\ Ln^\alpha(u)\ du,\ n \geq 1$$

विद्यमान होता है जहाँ $Ln^{(\alpha)}(x)$ लागेर बहुपदियों को, जो $\alpha > -1$ कोटि की हैं, प्रदर्शित करता है। यह भलीभाँति ज्ञात है कि $Ln^{(\alpha)}(x)$ बहुपदियों को जनक फलन

$$\sum_{n=0}^\infty Ln^{(\alpha)}(x)\, w^n = (1 - w)^{-\alpha - 1} \exp\left(\frac{-xw}{1 - w} \right) \tag{2.1}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।

फलन $f(x)$ के सम्बद्ध फूरियर-लागेर प्रसार को

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty \alpha_n\, Ln^{(\alpha)}(x). \tag{2.2}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ

$$(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}\alpha_n = \int_0^\infty \exp(-x)\, x^{\alpha} f(x)\, L n^{(\alpha)}(x)\, dx \tag{2.3}$$

3. हम अपने प्रमेय की उपपत्ति में निम्नलिखित प्रमेयिकाओं का प्रयोग करेंगे।

प्रमेयिका 1. यदि α यादृच्छिक तथा सत्य हो, C तथा w स्थिर धन अचर हों तो ज्यों-ज्यों $n \to \infty$

$$L n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha/2-1/4}\, O\left(n^{\alpha/2-1/4}\right); \text{ for } c/n \le x \le w \\ O\left(n^{\alpha}\right); \text{ for } 0 \le x \le c/n \end{cases} \tag{3.1}$$

उपपत्ति के लिए जेगों[2] को देखें।

प्रमेयिका 2. यदि α तथा λ यादृच्छिक तथा सत्य हों, $a > 0$, $0 < \eta < 4$ तो $n \to \infty$

$$\max \exp(-x/2)\, x^{\lambda} \,|\, L n^{(\alpha)}(x) \,| \sim n^{Q}, \tag{3.2}$$

जहाँ

$$Q = \begin{cases} \max(\lambda - 1/2,\ \alpha/2 - 1/4);\ a \le x \le (4-\eta)n. \\ \max(\lambda - 1/3,\ \alpha/2 - 1/4);\ x \ge a, \end{cases} \tag{3.3}$$

जहाँ उच्चिष्ठ को (3.3) के दक्षिण पक्ष में अन्तरालों में लिया गया है।

इस प्रमेयिका की उपपत्ति जेगो ने दी है ।[2]

प्रमेय की उपपत्ति

बिन्दु $x = 0$ पर श्रेणी (2.2) के n वें आंशिक योग को लागेर फलनों के लाम्बिकता गुण को व्यवहृत करते हुए

$$S n(O) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k^{(\alpha)}(O)$$

$$= \frac{1}{\Gamma((\alpha+1))} \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha} f(y) \sum_{k=0}^{n} L_k^{(\alpha)}(y)\, dy \tag{4.1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma((\alpha+1))} \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha} f(y)\, L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy$$

द्वारा व्यक्त किया जाय तो

$$S n(O) - f(O) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha} [f(y) - f(0)]\, L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha} F(y)\, L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy \qquad (4.2)$$

जहाँ

$$F(y) = [f(y) - f(O)] \ \{\Gamma((\alpha+1))\}^{-1}$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि

$$| S n(O) - f(O) | \leq \int_0^\infty \left| F(y) \right| e^{-y} y^{\alpha} \left| L_n^{(\alpha+1)}(y) \right| dy$$

$$\leq \left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{w} + \int_{w}^{\infty} \right) \left| F(y) \right| e^{-y} y^{\alpha} \left| L_n^{(\alpha+1)}(y) \right| dy$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 \text{ माना}$$

$[0, 1/n]$ परास में प्रमेयिका 1 तथा होल्डर की असमिका का प्रयोग करने पर

$$I_1 \leq \int_0^{1/n} | F(y) | e^{-y} y^{\alpha} O\left(n^{\alpha+1}\right) dy$$

$$U = O\left(n^{\alpha+1}\right) \left(\int_0^{1/n} \left| \frac{F(y)}{y^{\gamma}} \right|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_0^{1/n} \left| y^{\alpha+\gamma} \right|^q dy \right)^{1/q} \quad 1/p + 1/q = 1$$

$$= O\left(n^{\alpha+1}\right) \left(\frac{1}{n^{\alpha+\gamma+1/q}} \right) \text{ (4.1) से}$$

$$I_1 = O\left(n^{1/p-\gamma}\right) \qquad (4.3)$$

$(1/n, w)$, परास के लिए क्रम आकलन (3.1) के कारण हमें प्राप्त होता है कि

$$|L_n^{(\alpha+1)}(y)| = y^{-(\alpha+1)/2-1/4} \quad O\left(n^{(\alpha+1)/2-1/4}\right)$$

$$= y^{-\alpha/2-3/4} \quad O\left(n^{\alpha/2+1/4}\right)$$

इस तरह हम देखते हैं कि

$$I_2 = O\left(n^{\alpha/2+1/4}\right)\int_{1/n}^{w} |F(y)|\, e^{-y} y^{\alpha} y^{-\alpha/2-3/4}\, dy$$

$$= O\left(n^{\alpha/2+1/4}\right)\left(\int_{1/n}^{w}\left|\frac{F(y)}{y^{\gamma}}\right|^{p} dy\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{1/n}^{w}\left|y^{\alpha/2-3/4+\gamma}\right|^{q} dy\right)^{1/q}$$

$$= O\left(n^{\alpha/2+1/4}\right). O(1)\left[O(1) + O\left(n^{\alpha/2+\gamma+1/q-3/4}\right)^{-1}\right]$$

$$= O\left(n^{\alpha/2+1/4}\right) + O\left(n^{1/p-\gamma}\right) \quad (1.4)\text{से}$$

$$I_2 = A \,.\, \max\left(n^{\alpha/2+1/4},\ n^{1/p-\gamma}\right) \tag{4.4}$$

अब हम I_3 पर आवेंगे। हमें ज्ञात है कि

$$I_3 = \int_{w}^{\infty} F(y)\, \exp(-y)\, y^{\alpha}\left|L_n^{(\alpha+1)}(y)\right| dy$$

$$= \int_{w}^{\infty} |F(y)|\, \exp(-y/2)\left[\exp(-y/2)\, y^{\alpha}\left|L_n^{(\alpha+1)}(y)\right|\right] dy$$

$$= O\left(n^{\alpha/2+1/4}\right).\left(\int_{w}^{\infty} |F(y)|\exp(-y/2)\, dy\right)$$

$$I_3 = O\left(n^{\alpha/2+1/4}\right) \quad (1.5)\text{से} \tag{4.5}$$

I_1, I_2 एवं I_3 को संयुक्त करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है। इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

बहुमूल्य सुझावों एवं प्रोत्साहन के लिए लेखकगण डॉ० आशुतोष पाठक, रीडर, विक्रम विश्वविद्यालय उज्जैन के ऋणी हैं।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी० तथा मजहर, एस० एम०, Riv. Mat. Univ., 1985, Parma 4, No. 11, 43-47.
2. जेगो, जी०, **अमे० मैथ० सोसा०**, कोलो० पब्लि० न्यूयार्क, 1959 पृष्ठ 175.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 2, April 1997.

एक चर वाले H-फलन से युक्त समाकल

एस० एस० श्रीवास्तव

गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय ,जैसिंह नगर, शहडोल,

तथा

बी० एम० एल० श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय मॉडेल साइंस कालेज, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त-जनवरी 5, 1997]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य छः एक चर वाले H-फलन के समाकलों को प्राप्त करना है । प्रपत्र के अन्त में कतिपय विशिष्ट दशाएँ भी व्युत्पन्न की गई हैं।

Abstract

Integrals involving *H*- function of one variable. *By* S. S. Srivastava, Department of Mathematics, Govt. College, Jai Singh Nagar, Shahdol (M.P.) and Dr. B. M. L. Srivastava, Department of Mathematics, Govt. Model Science College, Rewa (M.P.).

The object of this paper is to evaluate six integrals, involving H-function of one variable. Some special cases have also been derived at the end of the paper.

1. प्रस्तावना

फाक्स[1] के एक चर वाले H-फलन को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है—

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \left| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right.\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \theta(s)\, x^s\, d s\,;$$

जहाँ

$$\theta(s) = \frac{\overset{m}{\underset{j=1}{\pi}} \Gamma\left(b_j - \beta_j s\right) \overset{n}{\underset{j=1}{\pi}} \Gamma\left(1 - a_j + \alpha_j s\right)}{\overset{q}{\underset{j=m+1}{\pi}} \Gamma\left(1 - b_j + \beta_j s\right) \overset{p}{\underset{j=n+1}{\pi}} \Gamma\left(a_j - \alpha_j s\right)}$$

2. प्रस्तुत शोधकार्य में हमें निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी।

$$\int_o^{\pi/2} e^{i(2\rho-1)\theta} (\sin\theta)^{\rho-1} (\cos\theta)^{\rho-2} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \frac{1}{2}(\alpha+\beta); e^{i(\theta-\pi/2)} \sin\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{e^{i\pi\rho/2} \Gamma(\rho-1) \Gamma(\alpha/2+\beta/2) \Gamma(\rho-\alpha/2-\beta/2-2)}{2^{\rho-\alpha-\beta+1} \Gamma\alpha \Gamma\beta} \times$$

$$\times \left[\frac{(2\rho-\alpha+\beta-2) \Gamma(\alpha/2+1/2) \Gamma\beta/2}{\Gamma(\rho-\alpha/2) \Gamma(\rho-\beta/2-1/2)} + \frac{(2\rho+\alpha-\beta-2) \Gamma\alpha/2 \Gamma\beta/2+1/2}{\Gamma(\rho-\alpha/2-1/2) \Gamma(\rho-\beta/2)}\right], \tag{2.1}$$

$$\int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\rho-2} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \frac{(\alpha+\beta)}{2}; \frac{x(1+a)}{1+ax+b(1-x)}\right)[1+ax+b(1-x)]^{-2\rho+1} dx$$

$$= \frac{2^{-2\rho+\alpha+\beta-1} \Gamma(\rho-1) \Gamma(\alpha/2+\beta/2-1)}{(1+a)^{\rho} (1+b)^{\rho-1} \Gamma\alpha \Gamma\beta} \times$$

$$\times \left[\frac{(2\rho-\alpha+\beta-2) \Gamma(\alpha/2+1/2) \Gamma\beta/2}{\Gamma(\rho-\alpha/2) \Gamma(\rho-\beta/2-1/2)} + \frac{(2\rho+\alpha-\beta-2) \Gamma\alpha/2 \Gamma\beta/2+1/2}{\Gamma(\rho-\alpha/2-1/2) \Gamma(\rho-\beta/2)}\right], \tag{2.2}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(2\rho+1)\theta} (\sin\theta)^{\rho-1} (\cos\theta)^{\rho} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2); e^{i(\theta-\pi/2)} \sin\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{e^{i\pi\rho/2} \Gamma\rho \Gamma(\rho-\alpha/2-\beta/2) \Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{2^{2\rho-\alpha-\beta+2} (\alpha-\beta) \Gamma\alpha \Gamma\beta} \times$$

$$\times \left[\frac{(2\rho-\alpha+\beta) \Gamma(\alpha/2+1/2) \Gamma\beta/2}{\Gamma(\rho-\alpha/2+1) \Gamma(\rho-\beta/2+1/2)} - \frac{(2\rho+\alpha-\beta) \Gamma\alpha/2 \Gamma(\beta/2+1/2)}{\Gamma(\rho-\alpha/2+1/2) \Gamma(\rho-\beta/2+1)}\right], \tag{2.3}$$

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\rho}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2);x\right)dx$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}2^{\rho-2}\Gamma\rho\,\Gamma(\rho-\alpha/2-\beta/2)\,\Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{(\alpha-\beta)\,\Gamma\alpha\,\Gamma\beta}$$

$$\times\left[\frac{(2\rho-\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha/2+1/2)\,\Gamma\beta/2}{\Gamma(\rho-\alpha/2+1)\,\Gamma(\rho-\beta/2+1/2)}-\frac{(2\rho+\alpha-\beta)\,\Gamma\alpha/2\,\Gamma(\beta/2+1/2)}{\Gamma(\rho-\alpha/2+1/2)\,\Gamma(\rho-\beta/2+1)}\right], \tag{2.4}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{i\pi(2\rho-1)\theta}(\sin\theta)^{\rho-2}(\cos\theta)^{\rho-1}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}(\alpha+\beta);e^{i\theta}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{e^{\pi i(\rho-1)/2}\,\Gamma\rho-1\,\Gamma(\alpha/2+\beta/2)\,\Gamma(\rho-\alpha/2-\beta/2-1)}{2^{2\rho-\alpha-\beta+1}\,\Gamma\alpha\,\Gamma\beta}$$

$$\times\left[\frac{(2\rho-\alpha+\beta-2)\,\Gamma(\alpha/2+1/2)\,\Gamma\beta/2}{\Gamma(\rho-\alpha/2)\,\Gamma(\rho-\beta/2-1/2)}-\frac{(2\rho+\alpha-\beta-2)\,\Gamma\alpha/2\,\Gamma(\beta/2+1/2)}{\Gamma(\rho-\alpha/2-1/2)\,\Gamma(\rho-\beta/2)}\right], \tag{2.5}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(2\rho+1)\theta}(\sin\theta)^{\rho}(\cos\theta)^{\rho-1}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2);e^{i\theta}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{e^{i\pi(\rho+1)/2}\,\Gamma\rho\,\Gamma(\rho-\alpha/2-\beta/2)\,\Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{2^{2\rho-\alpha-\beta+2}\,\Gamma\alpha-\beta\;\Gamma\alpha\,\Gamma\beta}$$

$$\times\left[\frac{(2\rho-\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha/2+1/2)\,\Gamma\beta/2}{\Gamma(\rho-\alpha/2+1)\,\Gamma(\rho-\beta/2+1/2)}-\frac{(2\rho+\alpha-\beta)\,\Gamma\alpha/2\,\Gamma(\beta/2+1/2)}{\Gamma(\rho-\alpha/2+1/2)\,\Gamma(\rho-\beta/2+1)}\right]. \tag{2.6}$$

3. प्रमुख समाकल

यहाँ हम निम्नलिखित समाकलों की स्थापना करेंगे—

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(2\rho-1)\theta}(\sin)^{\rho-1}(\cos\theta)^{\rho-2}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}(\alpha+\beta);e^{i(\theta-\pi/2)}\sin\theta\right)$$

$$\times\ H^{m,n}_{p,q}\left[z\, e^{2i\lambda\theta} (\sin\theta)^{\lambda} (\cos\theta)^{\lambda} \left| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{e^{(i\pi\rho)/2}\, \Gamma(\alpha/2 + \beta/2)}{2^{\rho-\alpha-\beta+1}\, \Gamma\alpha\, \Gamma\beta} \Big(\Gamma(\alpha/2 + 1/2)\, \Gamma\beta/2\, H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times \left[\frac{z\, e^{\pi i\lambda/2}}{2} \left| \begin{matrix} (2-\rho, \lambda)\, (3-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\, (2+\alpha-\beta-2\rho, 2\lambda)\, (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\, (1-\rho+\alpha/2, \lambda)\, (3/2+\beta/2-\rho, \lambda) (3-2\rho+\alpha-\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right. \right]$$

$$+\ \Gamma\alpha/2\, \Gamma(\beta/2+1/2)\, H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times \left[\frac{z\, e^{\pi i\lambda/2}}{2} \left| \begin{matrix} (2-\rho, \lambda)\, (3-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\, (2-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda)\, (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\, (3/2-\rho+\alpha/2, \lambda)\, (1-\rho+\beta/2, \lambda) (3-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right. \right], \tag{3.1}$$

$$\int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\rho-2} [1 + ax + b(1-x)]^{-2\rho+1}\, {}_2F_1\left(\alpha, \beta ; \frac{1}{2}(\alpha+\beta) ; \frac{x(1+a)}{1+ax+b(1-x)} \right)$$

$$\times\ H^{m,n}_{p,q}\left[\frac{x^{\lambda}(1-x)^{\lambda} z}{\{1+ax+b(1-x)\}^{2\lambda}} \left| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] dx$$

$$= \frac{2^{-2\rho+\alpha+\beta-1}\, \Gamma(\alpha/2+\beta/2)}{(1+a)^{\rho} (1+b)^{\rho-1}\, \Gamma\alpha\, \Gamma\beta} \Big(\Gamma(\alpha/2+1/2)\, \Gamma\beta/2\, H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times \left[\frac{z\, 2^{-2\lambda}}{(1+a)^{\lambda} (1+b)^{\lambda}} \left| \begin{matrix} (2-\rho, \lambda)\, (2-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\, (2-2\rho+\alpha-\beta, 2\lambda)\, (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\, (1-\rho+\alpha/2, \lambda)\, (3/2-\rho+\beta/2, \lambda) (3-2\rho+\alpha-\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right. \right]$$

$$+\ \Gamma\alpha/2\, \Gamma(\beta/2+1/2)\, H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times \left[\frac{z\, 2^{-2\lambda}}{(1+a)^{\lambda} (1+b)^{\lambda}} \left| \begin{matrix} (2-\rho, \lambda)\, (2-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\, (2-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda)\, (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\, (3/2-\rho+\alpha/2, \lambda)\, (1-\rho+\beta/2, \lambda) (3-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right. \right] \tag{3.2}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(2\rho+1)\theta}(\sin)^{\rho-1}(\cos\theta)^{\rho}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2);e^{i(\theta-\pi/2)}\sin\theta\right)$$

$$\times H_{p,q}^{m,n}\left[z\,e^{2i\lambda\theta}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]d\theta$$

$$=\frac{e^{(i\pi\rho)/2}\,\Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{2^{2\rho-\alpha-\beta+2}(\alpha-\beta)\,\Gamma\alpha\,\Gamma\beta}\left(\Gamma(\alpha/2+1/2)\,\Gamma\beta/2\,H_{p+3,q+3}^{m,n+3}\right.$$

$$\times\left[\frac{z\,e^{\pi i\lambda/2}}{4^{\lambda}}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\rho,\lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2,\lambda)\,(\alpha-\beta-2\rho,2\lambda)\,(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\,(\alpha/2-\rho,\lambda)\,(1/2-\rho+\beta/2,\lambda)(1-2\rho+\alpha-\beta,2\lambda)\end{matrix}\right]$$

$$-\,\Gamma\alpha/2\,\Gamma(\beta/2+1/2)\,H_{p+3,q+3}^{m,n+3}$$

$$\times\left[\frac{z\,e^{\pi i\lambda/2}}{4^{\lambda}}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\rho,\lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2,\lambda)\,(\beta-\alpha-2\rho,2\lambda)\,(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\,(1/2-\rho+\alpha/2,\lambda)\,(\beta/2-\rho,\lambda)(1-2\rho-\alpha+\beta,2\lambda)\end{matrix}\right]$$

(3.3)

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\rho}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta:\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2):x\right)H_{p,q}^{m,n}\left[x^{\lambda}(1-x)^{\lambda}z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}\,2^{\rho-2}\,\Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{(\alpha-\beta)\,\Gamma\alpha\,\Gamma\beta}\left(\Gamma(\alpha/2+1/2)\,\Gamma\beta/2\,H_{p+3,q+3}^{m,n+3}\right.$$

$$\times\left[2^{\lambda}z\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\rho,\lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2,\lambda)\,(\alpha-\beta-2\rho,2\lambda)\,(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\,(1/2-\rho+\beta/2,\lambda)\,(-\rho+\alpha/2,\lambda)\,(1+\alpha-\beta-2\rho,2\lambda)\end{matrix}\right]$$

$$-\,\Gamma\alpha/2\,\Gamma(\beta/2+1/2)\,H_{p+3,q+3}^{m,n+3}$$

$$\left.\times\left[2^{\lambda}z\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\rho,\lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2,\lambda)\,(\beta-\alpha-2\rho.\,2\lambda)\,(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\,(1-\rho+\alpha/2-1/2,\lambda)\,(-\rho+\beta/2,\lambda)\,(1+\beta-\alpha-2\rho,2\lambda)\end{matrix}\right]\right)$$

(3.4)

$$\int_0^{\pi/2} e^{i\pi(2\rho-1)\theta}(\sin\theta)^{\rho-2}(\cos\theta)^{\rho-1}{}_2F_1\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2}(\alpha+\beta);e^{i\theta}\cos\theta\right)$$

$$\times H_{p,q}^{m,n}\left[z e^{2i\pi\lambda\theta}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{\lambda}\left|\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]d\theta$$

$$=\frac{e^{\pi i(\rho-1)/2}\Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{2^{2\rho-\alpha-\beta+1}\Gamma\alpha\Gamma\beta}\left(\Gamma(\alpha/2+1/2)\Gamma\beta/2\, H_{p+3,q+3}^{m,n+3}\right.$$

$$\times\left[\frac{2e^{\pi i\lambda/2}}{4^{\lambda}}\left|\begin{matrix}(2-\rho,\lambda)(2-\rho+\alpha/2+\beta/2,\lambda)(2-2\rho+\alpha-\beta,2\lambda)(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}(1-\rho+\alpha/2,\lambda)(3/2-\rho+\beta/2,\lambda)(3-2\rho+\alpha-\beta,2\lambda)\end{matrix}\right.\right]$$

$$+\Gamma\alpha/2\,\Gamma(\beta/2+1/2)H_{p+3,q+3}^{m,n+3}$$

$$\left.\times\left[\frac{z e^{\pi i\lambda/2}}{4^{\lambda}}\left|\begin{matrix}(2-\rho,\lambda)(2-\rho+\alpha/2+\beta/2,\lambda)(2-2\rho-\alpha+\beta,2\lambda)(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}(3/2-\rho+\alpha/2,\lambda)(1-\rho+\beta/2,\lambda)(3-2\rho-\alpha+\beta,2\lambda)\end{matrix}\right.\right]\right)$$

(3.5)

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(2\rho+1)\theta}(\sin\theta)^{\rho}(\cos\theta)^{\rho-1}{}_2F_1\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2);e^{i\theta}\cos\theta\right)$$

$$\times H_{p,q}^{m,n}\left[z e^{2i\theta\lambda}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{\lambda}\left|\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]d\theta$$

$$=\frac{e^{i\pi(\rho-1)/2}\Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{2^{2\rho-\alpha-\beta+2}\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma\alpha\Gamma\beta}\left(\Gamma(\alpha/2+1/2)\Gamma\beta/2\, H_{p+3,q+3}^{m,n+3}\right.$$

$$\times\left[\frac{z e^{i\pi\lambda/2}}{4^{\lambda}}\left|\begin{matrix}(1-\rho,\lambda)(1-\rho+\alpha/2+\beta/2,\lambda)(\alpha-\beta-2\rho,2\lambda)(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}(\alpha/2-\rho,\lambda)(1/2-\rho+\beta/2,\lambda)(1+\alpha-\beta-2\rho,2\lambda)\end{matrix}\right.\right]$$

$$-\Gamma\alpha/2\,\Gamma(\beta/2+1/2)H_{p+3,q+3}^{m,n+3}$$

$$\times \left[\frac{z\, e^{i\pi\lambda/2}}{4^{\lambda}} \left| \begin{matrix} (1-\rho, \lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\,(\beta-\alpha-2\rho, 2\lambda)\,(a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\,(1/2-\rho+\alpha/2, \lambda)\,(\beta/2-\rho, \lambda)(1-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right. \right] \Bigg) \tag{3.6}$$

उपपत्ति

(3.1) को सिद्ध करने के लिए वामपक्ष में (1.1) का उपयोग करते हैं और समाकल का क्रम बदलते हैं तो हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{\xi}\,\theta(\xi)\left(\int_0^{\pi/2} e^{i[2(\rho+\lambda\xi)-1]\theta}\,(\sin\theta)^{(\rho+\lambda\xi)-1}\,(\cos\theta)^{(\rho+\lambda\xi)-2}\right.$$

$$\left.\times\,{}_2F_1\left(\alpha, \beta\,;\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,;e^{i(\theta-\pi/2)}\sin\theta\right)d\theta\right)d\xi.$$

प्राप्त होता है। अब परिणाम (2.1) को व्यवहृत करने तथा (1.1) की सहायता से विवेचना करने पर हमें (3.1) की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार अग्रसर होने पर परिणाम (3.2) से (3.6) तक को क्रमशः (2.2) (2.3) (2.4) (2.5) तथा (2.6) की सहायता से स्थापित किया जा सकता है।

4. विशिष्ट दशाएँ

(3.2) में $a = b$ रखने पर

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\rho-2}\,{}_2F_1\left(\alpha, \beta\,;\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,;x\right)H^{m,n}_{p,q}\left[\frac{x\lambda(1-x)^{\lambda}z}{(1+a)^{2\lambda}}\left|\begin{matrix}(a_j, \alpha_j)_{1,p}\\(b_j, \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$= \frac{2^{-2\rho+\alpha+\beta-1}\,\Gamma(\alpha/2+\beta/2)}{\Gamma\alpha\,\Gamma\beta}\Bigg(\Gamma(\alpha/2+1/2)\,\Gamma\beta/2\,H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times\left[\frac{z\,2^{-2\lambda}}{(1+a)^{2\lambda}}\left|\begin{matrix}(2-\rho, \lambda)\,(2-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\,(2-2\rho+\alpha-\beta, 2\lambda)\,(a_j, \alpha_j)_{1,p}\\(b_j, \beta_j)_{1,q}\,(1-\rho+\alpha/2, \lambda)\,(3/2-\rho+\beta/2, \lambda)\,(3-2\rho+\alpha-\beta, 2\lambda)\end{matrix}\right.\right]$$

$$+\ \Gamma\alpha/2\,\Gamma(\beta/2+1/2)\,H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times \left[\frac{z\, 2^{2\lambda}}{(1+a)^{2\lambda}} \left| \begin{matrix} (2-\rho, \lambda)\,(2-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\,(2-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda)\,(a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\,(3/2-\rho+\alpha/2, \lambda)\,(1-\rho+\beta/2, \lambda)(3-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right. \right] \tag{4.1}$$

दो निम्नलिखित समाकलों को असली तथा काल्पनिक अंशों को समतुल्य करके (3.3) से निम्नलिखित समाकलों को सीधे प्राप्त किया जा सकता है।

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2\rho+1)\theta\,(\sin\theta)^{\rho-1}(\cos\theta)^{\rho}\, {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2); e^{i(\theta-\pi/2)}\sin\theta\right)$$

$$\times H^{m,n}_{p,q}\left[z\, e^{2i\lambda\theta}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{\lambda} \left| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] d\theta$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi\rho}{2}\,\Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{2^{2\rho-\alpha-\beta+2}\,\Gamma(\alpha-\beta)\,\Gamma\alpha\,\Gamma\beta} \Big(\Gamma(\alpha/2+1/2)\,\Gamma\beta/2\, H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times \left[\frac{z\, e^{\pi i\lambda/2}}{4^{\lambda}} \left| \begin{matrix} (1-\rho, \lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\,(\alpha-\beta-2\rho, 2\lambda)\,(a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\,(\alpha/2-\rho, \lambda)\,(1/2-\rho+\beta/2, \lambda)\,(1-2\rho+\alpha-\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right. \right]$$

$$-\ \Gamma\alpha\,\Gamma(\beta/2+1/2)\, H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times \left[\frac{z\, e^{\pi i\lambda/2}}{4^{\lambda}} \left| \begin{matrix} (1-\rho, \lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\,(\beta-\alpha-2\rho, 2\lambda)\,(a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\,(1/2-\rho+\alpha/2, \lambda)\,(\beta/2-\rho, \lambda)(1-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right. \right] \Big) \tag{4.2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2\rho+1)\theta\,(\sin\theta)^{\rho-1}(\cos\theta)^{\rho}\, {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2); e^{i(\theta-\pi/2)}\sin\theta\right)$$

$$\times H^{m,n}_{p,q}\left[z\, e^{2i\lambda\theta}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{\lambda} \left| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] d\theta$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi\rho}{2}\,\Gamma(\alpha/2+\beta/2+1)}{2^{2\rho-\alpha-\beta+2}\,\Gamma(\alpha-\beta)\,\Gamma\alpha\,\Gamma\beta} \Big(\Gamma(\alpha/2+1/2)\,\Gamma\beta/2\, H^{m,n+3}_{p+3,q+3}$$

$$\times \left[\frac{z e^{\pi i \lambda/2}}{4^{\lambda}} \middle| \begin{matrix} (1-\rho, \lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\,(\alpha-\beta-2\rho, 2\lambda)\,(a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\,(\alpha/2-\rho, \lambda)\,(1/2-\rho+\beta/2, \lambda)\,(1-2\rho+\alpha-\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right]$$

$$-\ \Gamma\alpha\,\Gamma(\beta/2+1/2)\, H^{m, n+3}_{p+3, q+3}$$

$$\times \left[\frac{z e^{\pi i \lambda/2}}{4^{\lambda}} \middle| \begin{matrix} (1-\rho, \lambda)\,(1-\rho+\alpha/2+\beta/2, \lambda)\,(\beta-\alpha-2\rho, 2\lambda)\,(a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\,(1/2-\rho+\alpha/2, \lambda)\,(\beta/2-\rho, \lambda)(1-2\rho-\alpha+\beta, 2\lambda) \end{matrix} \right] \Bigg). \tag{4.3}$$

निर्देश

1. फाक्स, सी० Tranje Ame. Soc. 1961, 98, 395-421.

2. शर्मा, गीता तथा राठी, के० अर्जुन, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1991, 34, 25-30

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 2, April 1997.

दो चरों वाले I-फलन के लिए प्रसार सूत्र

मनोज कुमार अग्रवाल

गणित विभाग, एस० एस० एल० जैन स्नातकोत्तर महाविद्यालय,
विदिशा (म० प्र०)

[प्राप्त-अक्टूबर 1, 1994]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों वाले I-फलन के लिए एक सामान्य प्रसार सूत्र स्थापित करना है। इस फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण से एक तथा दो चरों वाले सरल विशिष्ट फलनों के लिए प्रसार सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं।

Abstract

An expansion formula for the I-Function of two variables. *By* Manoj Kumar Agrawal, Department of Mathematics, S. S. L. Jain P. G. College, Vidisha (M.P.).

The aim of the present paper is to establish a general expansion formula for I-function of two variables. It is significant to observe that a large number of finite and infinite series for this function can be easily summed up by using the well known summation therorems for ordinary hypergeometric series in the main result. Also, by appropriately specializing the parameters of the I-function of two variables, one can easily obtain expansion formulas for simpler special functions of one and two variables.

1. प्रस्तावना तथा संकेतन

दो चरों वाले I-फलन को शर्मा तथा मिश्रा ने[9] परिभाषित किया था और हम इसे निम्न प्रकार से प्रदर्शित करेंगें।

$$I\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = I^{\ldots:\ldots;\ldots}_{\ldots:\ldots;\ldots}\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \ldots:\ldots;\ldots \\ \ldots:\ldots;\ldots \end{matrix}\right] = I^{0,\, n_1 \,:\, m_2,\, n_2;\, m_3,\, n_3}_{p_{i_1},\, q_{i_1} \,:\, r_1 \,:\, p_{i_2},\, q_{i_2} \,:\, r_2;\, p_{i_3},\, q_{i_3} \,:\, r_3}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \left[\left(a_j, \alpha_j, A_j\right)_{1, n_1}\right], \left[\left(a_{ji_1}, \alpha_{ji_1}, A_{ji_1}\right)_{n_1+1, p_{i_1}}\right], \left[\left(c_j, \gamma_j\right)_{1, n_2}\right], \\ \left[\left(b_{ji_1}, \beta_{ji_1}, B_{ji_1}\right)_{1, q_{i_1}}\right], \left[\left(d_j, \delta_j\right)_{1, m_2}\right], \left[\left(d_{ji_2}, \delta_{ji_2}\right)_{m_2+1, q_{i_2}}\right], \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \left[\left(c_{ji_2}, \gamma_{ji_2}\right)_{n_2+1, p_{i_2}}\right], \left[\left(e_j, E_j\right)_{1, n_3}\right], \left[\left(e_{ji_3}, E_{ji_3}\right)_{n_3+1, p_{i_3}}\right] \\ \left[\left(f_j, F_j\right)_{1, m_3}\right], \left[\left(f_{ji_3}, F_{ji_3},\right)_{m_3+1, q_{i_1}}\right] \end{matrix}\right]$$

$$\frac{1}{(2\pi\omega)^2} \int_{L_1}\int_{L_2} \phi_1(\xi, \eta)\, \theta_2(\xi)\, \theta_3(\eta)\, z_1^{\xi} z_2^{\eta}\, d\xi\, d\eta \qquad (1.1)$$

जिसमें अन्य सारे प्रतिबन्ध युक्त हैं जिन्हें शर्मा तथा मिश्रा [9] और अग्रवाल ने [2,3] पहले ही विस्तार से दिया है।

हम दो चरों वाले वाले I-फलन में तीन डाट (...) का प्रयोग यह दिखाने के लिए करेंगे कि दो चरों वाले I-फलन के सारे प्राचल (1.1) जैसे ही हैं।

2. प्रमुख परिणाम

जिस प्रसार सूत्र की स्थापना की जानी है वह है -

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{A} \left(a'_j\right)_k z^k}{\prod_{j=1}^{B} \left(b'_j\right)_k k!}$$

$$\times\, I^{0,\, n_1 + C \,:\, m_2 + C_1,\, n_2 + G_1;\, m_3 + C_2,\, n_3 + G_2}_{p_{i_1} + C + D,\, q_{i_1} + E \,:\, r_1 \,:\, p_{i_2} + G_1 + H_1,\, q_{i_2} + C_1 + D_1 \,:\, r_2;\, p_{i_3} + G_2 + H_2,\, q_{i_3} + C_2 + D_2 \,:\, r_3}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \left[\left(u_j - k; \rho_j, U_j\right)_{1, C}\right], \left[\left(a_j; \alpha_j, A_j\right)_{1, n_1}\right], \\ \left[\left(b_{ji_1}, \beta_{ji_1}, B_{ji_1}\right)_{1, q_{i_1}}\right], \left[\left(w_j - k; \omega_j, W_j\right)_{1, E}\right]: \end{matrix}\right.$$

$$\left[\left(a_{ji_1}, \alpha_{ji_1}, A_{ji_1}\right)_{n_1+1, p_{i_1}}\right], \left[\left(\zeta_j + k ; \sigma_j, V_j\right)_{1, D}\right] : \left[\left(g_j - k ; \eta_\varphi\right)_{1, G_1}\right], ..$$

$$\left[\left(i_j + k, \mu_j\right)_{1, C_1}\right], ..., \left[\left(l_j - k, v_j\right)_{1, D_1}\right]; \left[\left(k_j + k, K_j\right)_{1, C_2}\right], ...,$$

$$\left.\begin{matrix}\left[\left(h_j + k, \xi_j\right)_{1, H_1}\right]; \left[\left(r_j - k, R_j\right)_{1, G_2}\right], ..., \left[\left(s_j + k, S_j\right)_{1, H_2}\right] \\ \left[\left(t_j - k, T_j\right)_{1, D_2}\right]\end{matrix}\right]$$

$$\frac{1}{(2\pi\omega)^2} \int_{L_1}\int_{L_2} \phi_1(\xi, \eta)\, \theta_2(\xi)\, \theta_3(\eta)\; I\begin{bmatrix} A_1(\xi, \eta) \\ B_1(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

$${}_{A+P}F_{B+Q}\left[\begin{matrix}\left(a'_A\right), A_1(\xi, \eta); \\ \left(b'_B\right), B_1(\xi, \eta);\end{matrix}\; z\right] z_1^{\xi} z_2^{\eta}\, d\xi\, d\eta \qquad (2.1)$$

जहाँ $A_1(\xi, \eta)$ बताता है

$$\left[\left(1 - u_j + \rho_j \xi + U_j \eta\right)_{1, C}\right], \left[\left(1 - g_j + \eta_\varphi \xi\right)_{1, G_1}\right], \left[\left(i_j - \mu_j\, \xi\right)_{1, C_1}\right],$$

$$\left[\left(1 - r_j + R_j \eta\right)_{1, G_2}\right], \left[\left(k_j - K_j \eta\right)_{1, C_2}\right]$$ को, $B_1(\xi, \eta)$ बताता है

$$\left[\left(v_j - \sigma_j \xi - V_j \eta\right)_{1, D}\right], \left[\left(1 - W_j + \omega_j \xi + W_j \eta\right)_{1, E}\right], \left[\left(h_j - \xi_j, \eta\right)_{1, H_1}\right],$$

$$\left[\left(1 - l_j + v_j \xi\right)_{1, D_1}\right], \left[\left(s_j - S_j \eta\right)_{1, H_2}\right], \left[\left(1 - t_j + T_j \eta\right)_{1, D_2}\right].$$ को,

सूत्र (2.1) तभी सत्यापित होता है जब निम्नलिखित प्रतिबन्ध सेटों में से कोई एक तुष्ट होता है-

(i) $A + P < B + Q + 1$

(ii) $A + P = B + Q + 1, |z| < 1$

(iii) $A + P = B + Q + 1, \mathrm{Re}(\theta) > 0, z = 1$

(iv) $A + P = B + Q + 1, \mathrm{Re}(\theta + 1) > 0, z = -1$

जहाँ

$$P = C + G_1 + G_2 + C_1 + C_2$$

$$Q = D + E + H_1 + H_2 + D_1 + D_2$$

तथा

$$\theta = \sum_{j=1}^{B} b'_j - \sum_{j=1}^{A} a'_j - \left\{ \sum_{j=1}^{C_1} i_j + \sum_{j=1}^{C_2} k_j + \sum_{j=1}^{E} w_j \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{D_1} l_j + \sum_{j=1}^{D_2} t_j - \sum_{j=1}^{C} u_j - \sum_{j=1}^{G_1} g_j - \sum_{j=1}^{G_2} r_j$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{D} \zeta_j - \sum_{j=1}^{H_1} h_j + \sum_{j=1}^{H_2} s_j \right\} + D_2 + E + D_1 - C - G_1 - G_2$$

उपपत्तिः- (2.1) का मान निकालने के लिए हम सर्वप्रथम (2.1) के वामपक्ष में आये दो चरों वाले I-फलन को (1.1) में आये टूर समाकल से प्रतिस्थापित करते हैं और समाकलन तथा संकलन के क्रम को परिवर्तित करते हैं जो कि (1.1)में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, तत्पश्चात् सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन की परिभाषा का उपयोग करने पर [देखें [10], p.40; [1], p.2]. हमें वांछित परिणाम (2.1) प्राप्त होता है। विस्तृत विवरण छोड़ा जा सकता है।

विशिष्ट दशाएँ

(A) 45 सम्भव दशाओं को निम्नलिखित पांच समूहों में विभाजित किया जाता है।

समूह I

(i) $A = 2,\ B = 0,\ P = 0,\ Q = 1\ (E = 1)$

(ii) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (E = 1)$

(iii) $A = 0,\ B = 1,\ P = 2,\ Q = 0\ (C_2 = C_1 = 1)$

(iv) $A = B = 0,\ P = 2,\ Q = 1\ (E = G_1 = G_2 = 1)$

(v) $A = B = 0,\ P = 2,\ Q = 1\ (E = C_1 = C_2 = 1)$

समूह II

(i) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(E = G_1 = 1)$

(ii) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(E = C_1 = 1)$

(iii) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(D_1 = C_2 = 1)$

(iv) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = C = G_1 = 1)$

(v) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = C = C_1 = 1)$

(vi) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = G_1 = C_1 = 1)$

(viii) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(D_1 = G_1 = C_2 = 1)$

(ix) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(D_1 = C_1 = C_2 = 1)$

समूह III

(i) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(E = G_2 = 1)$

(ii) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(E = C_2 = 1)$

(iii) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(D_2 = C_1 = 1)$

(iv) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = C = G_2 = 1)$

(v) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = C = C_2 = 1)$

(vi) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = G_2 = C_2 = 1)$

(vii) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = C_1 = G_2 = 1)$

(viii) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(D_2 = C_1 = G_2 = 1)$

(ix) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(D_2 = C_1 = C_2 = 1)$

समूह IV

(i) $A = 2, B = 0, P = 0, Q = 1$ $(H_1 = 1)$

(ii) $A = 2, B = 0, P = 0, Q = 1$ $(D_1 = 1)$

(iii) $A = B = 1, P = 1, Q = 0$ $(G_1 = 1)$

(iv) $A = B = 1, P = 1, Q = 0$ $(C_1 = 1)$

(v) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(H_1 = G_1 = 1)$

(vi) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(H_1 = C_1 = 1)$

(vii) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(D_1 = G_1 = 1)$

(viii) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(D_1 = C_1 = 1)$

(ix) $A = 0, B = 1, P = 2, Q = 0$ $(G_1 = C_1 = 1)$

(x) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(H_1 = G_1 = C_1 = 1)$

(xi) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(D_1 = G_1 = C_1 = 1)$

समूह V

(i) $A = 2, B = 0, P = 0, Q = 1$ $(H_2 = 1)$

(ii) $A = 2, B = 0, P = 0, Q = 1$ $(D_2 = 1)$

(iii) $A = B = 1, P = 1, Q = 0$ $(G_2 = 1)$

(iv) $A = B = 1, P = 1, Q = 0$ $(C_2 = 1)$

(v) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(H_2 = G_2 = 1)$

(vi) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(H_2 = C_2 = 1)$

(vii) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(D_2 = G_2 = 1)$

(viii) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(D_2 = C_2 = 1)$

(ix) $A = 0, B = 1, P = 2, Q = 0$ $(G_2 = C_2 = 1)$

(x) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(H_2 = G_2 = C_2 = 1)$

(xi) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(D_2 = G_2 = C_2 = 1)$

उदाहरणार्थ (2.1) में $A = 0, B = 1, P = 2, Q = 0$ ($C_2 = C_1 = 1$) [समूह-I (iii) तथा रखने तथा इसके दक्षिण पक्ष में गास प्रमेय [10, p.243 (111.3)] का उपयोग करने पर हमें निम्नलिखित संकलन सूत्र प्राप्त होता है।

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(b'1 \right)_k \, k \,! \right]^{-1} I^{0, n_1 + C : m_2 + 1, n_2 = G_1 ; m_3 + 1, n_3 + G_2}_{p_{i_1} + C + D, q_{i_1} + E : r_1 : p_{i_2} + G_1 + H_1, D_1 : r_2 ; p_{i_3} + G_2 + H_2, q_{i_3} + 1 + D_2 : r_3}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \ldots, \ldots, \ldots, \ldots : \ldots, \ldots, \ldots, \ldots : \ldots, \ldots, \ldots : \ldots \\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots : \left[\left(i_1 + k, u_1 \right) \right], \ldots, \ldots, \ldots ; \left[\left(k_1 + k, K_1 \right) \right], \ldots, \ldots, \ldots \end{matrix} \right]$$

$$= \left| \left(b'1 \right) I^{\ldots : \ldots ; \ldots}_{\ldots : \ldots ; \ldots} \right.$$

$$\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left[\left(1 - b'1 + i_1 + k_1 ; U_1, K_1 \right) \right], \ldots : \ldots \ldots ; \ldots \\ \ldots : \left[\left(i_1, \mu_1 \right) \right], \ldots, \left[lef(1 - b'1 + i_1, u_1 \right. : \left[\left(k_1, K_1 \right) \right], \ldots, \left[\left(1 - b'1 + k_1, K_1 \right) \right] \end{matrix} \right]$$

(3.1)

(B) 19 सम्भव दशाओं को निम्नांकित 5 समूहों में विभाजित किया जाता है--

समूह 1

(i) $A = 1, B = 0, P = Q = 1$ $(E = C = 1)$

समूह 2

(i) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = C = G_1 = 1)$

(ii) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = C = C_1 = 1)$

(iii) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = G_1 = C_2 = 1)$

समूह 3

(i) $A = B = 0, P = 2, Q = 1$ $(E = C = G_2 = 1)$

(ii) $A = B = 0,\ P = 2,\ Q = 1\ (E = C = C_2 = 1)$

(iii) $A = B = 0,\ P = 2,\ Q = 1\ (E = G_2 = C_1 = 1)$

समूह 4

(i) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (H_1 = G_1 = 1)$

(ii) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (H_1 = C_1 = 1)$

(iii) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (D_1 = G_1 = 1)$

(iv) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (D_1 = C_1 = 1)$

(v) $A = B = 0,\ P = 2,\ Q = 1\ (H_1 = G_1 = C_1 = 1)$

(vi) $A = B = 0,\ P = 2,\ Q = 1\ (D_1 = G_1 = C_1 = 1)$

समूह 5

(i) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (H_2 = G_2 = 1)$

(ii) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (H_2 = C_2 = 1)$

(iii) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (D_2 = G_2 = 1)$

(iv) $A = 1,\ B = 0,\ P = Q = 1\ (D_2 = C_2 = 1)$

(v) $A = B = 0,\ P = 2,\ Q = 1\ (H_2 = G_2 = C_2 = 1)$

(vi) $A = B = 0,\ P = 2,\ Q = 1\ (D_2 = G_2 = C_2 = 1)$

उदाहणार्थ (2.1) में $A = 1, B = 0, PQ = 1\ (E = C = 1)$ [समूह I (i)] तथा Z=-1 रखने तथा इसके दक्षिण पक्ष में उमार को प्रमेय [10, p.243, 111.5)] का प्रयोग करने पर हमें निम्नांकित संकलन सूत्र प्राप्त होता है।

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a'_1)_k}{k\ !}\ I^{0,\, n_1+1\ :\ \dots\ ;\ \dots}_{P_{i_1}+1+D,\, q_{i_1}+1\ :\ r_1\ :\ \dots\ ;\ \dots}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left[\left(u_1 - k\ ;\ \rho_1,\ U_1 \right) \right],\ \dots\ :\ \dots\ ;\ \dots \\ \left[\left(-1 + a'_1 + u_1 - k\ ;\ \rho_1,\ U_1 \right) \right],\ \dots\ :\ \dots\ ;\ \dots \end{matrix} \right]$$

$$= I^{\ldots:\ldots;\ldots}_{\ldots,\ \ldots;\ldots}\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} \left[\left(u_1;\rho_1,U_1\right)\right],\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{u_1}{2};\frac{\rho_1}{2},\frac{U_1}{2}\right)\right],\ldots;\ldots:\ldots;\ldots \\ \left[\left(1+u_1;\rho_1,U_1\right)\right],\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{u_1}{2}+a'_1;\frac{\rho}{2},\frac{U_1}{2}\right)\right],\ldots:\ldots;\ldots \end{matrix}\right.\right\}$$

अन्य ज्ञात प्रमेयों के संगत ऐसी ही योजनाएँ बनाई जा सकती हैं।

इस तरह हमारे प्रमुख परिणाम (2.1) से अनेक संकलन सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं। हमारे प्रमुख परिणाम (2.1) से अन्यों के द्वारा प्राप्त किये गये परिणाम भी प्राप्त किये जा सकते हैं। [1,5,6,7,12,13] वर्मा[14] परिहार[8] तथा गीता अनेजा[4] द्वारा प्राप्त किये गये सामान्य प्रसार हमारे प्रमुख परिणाम (2.1) की विशिष्ट दशाएँ हैं।

टिप्पणी : यदि उपर्युक्त (1.1) से लेकर (3.2) समस्त समीकरणों में $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ हो तो हमें दो चरों वाले H-फलन के संगत परिणाम प्राप्त होते हैं [11, p.110-120] ।

निर्देश

1. अगरवाल तथा गोयल : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1974, 17, 155-163.
2. अग्रवाल, एम० के० : Acta Ciencia Indica 1993.
3. अग्रवाल, एम० के० : **ज्ञानाभ,** 1994, 24.
4. अनेजा, गीता, **ज्ञानाभ,** : 1986, 16, 121-128
5. चौरसिया, वी० बी० एल० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1977, 20, 91-95
6. होरा, एन० एस० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1974, 17, 177-183
7. मांगलिक, आर० सी० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1975, 18, 197-202
8. परिहार, सी० एल० : Math Education, Sect, 1974, A8, 29-46
9. शर्मा, सी० के० तथा मिश्रा, पी० एल० : Acta Ciencia Indica, 1991, XVII, M, 6, 667-672.
10. स्लेटर, एल जे०, Generalized Hypergeometric Functions, कैम्ब्रिज यूनि० प्रेस० 1966
11. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के०सी० तथा गोयल, एस० पी० : The H functions of one and two variables with Applications, South Asian Pub., New Delhi and Madras, 1982
12. वशिष्ट, एस० के० : *Indin J. Pure, Appl. Math,* 1975, 46 3-468.
13. वशिष्ट, एस० के० तथा गोयल, एस० पी० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1978, 21, 237-246
14. वर्मा, ए० : Math Zeitschr, 1964, 83, 29-36.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No 2, April 1997.

जनसंख्या वृद्धि का समीकरण प्राप्त करने के लिए H-फलन का सम्प्रयोग

एस० एस० श्रीवास्तव तथा बी० एम० एल० श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय मॉडल साइंस कालेज, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त-जनवरी 5, 1997]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में हमने एक चर वाले फाक्स H-फलन के प्रयोग से जनसंख्या वृद्धि का समीकरण स्थापित किया है।

Abstract

Application of H-function for obtaining equation of population growth. *By* S. S. Srivastava, Department of Mathematics, Govt. College, Jaising Nagar, Shahdol (M. P.) and B. M. L. Srivastava, Department of Mathmatics, Govt. Model Science College, Rewa (M.P.).

1. प्रस्तावना

एक चर वाले फाक्स के H-फलन को[1] निम्नवत् परिभाषित किया जाता है—

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi}\int_L \theta(s)\,x^s d\,s; \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma((b_j-\beta_j s))\prod_{j=1}^{n}\Gamma((1-a_j+\alpha_j s))}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma((1-b_j+\beta_j s))\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma((a_j-\alpha_j s))}$$

2. मुख्य परिणाम

H-फलन में जनसंख्या के समीकरण को निम्नवत् प्रस्तुत किया जाता है

$$\int H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[x\left|\begin{matrix}(1-P,P_1)(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}(-P,P_1)\end{matrix}\right.\right]dP$$

$$=k\,H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[x\left|\begin{matrix}(-t,t_1)(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}(1-t,t_1)\end{matrix}\right.\right]+c\,H^{m,n}_{p,q}\left[x\left|\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]. \tag{2.1}$$

3. उपपत्ति

माना कि समय t पर जनसंख्या का आकर $P(t)$ है और ΔP समय Δt के संगत जनसंख्या की वृद्धि है तो

$$\Delta P \propto P\Delta t \tag{3.1}$$

इससे निम्नलिखित अवकल समीकरण[2] प्राप्त होता है—

$$\frac{dP}{dt}=KP \tag{3.2}$$

जहाँ K समानुपाती अचर है। (3.2) का समाकलन करने पर

$$\int \frac{1}{P}\,dP = K\int 1.dt$$

अथवा $$\int \frac{\Gamma P}{\Gamma(P+1)}dP = K.t + C = K.\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma t} + C.$$

C का मान प्रारम्भिक प्रतिबन्ध $t=0$, $P=P_0$ पर प्राप्त किया जा सकता है।

पुनः (3.3) में $P = P+P_1S$ एवं $t = t+t_1S$ रखने पर तथा दोनों पक्षों में $\frac{1}{2\pi i}\theta(s)x^s$ से गुणा करने एवं कटूर L की दिशाओं में S के प्रति समाकलन करने तथा (1.1) को व्यवहृत करने पर हमें (2.1) की प्राप्ति होती है।

निर्देश

1. फाक्स, सी०, Trans. American Soc., 1961, 98, 395-421

2. सक्सेना, विनोद प्रकाश, Bio. Mathematics- An Introduction, म० प्र० हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, 1993 पृष्ठ 36-37

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 2, April 1997.

दो चरों के H-फलन वाले द्विगुण समाकल

एस० एस० श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय कालेज, जयसिंह नगर, शहडोल (म० प्र०)

[प्राप्त - मई 30, 1997]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों वाले H-फलन युक्त पांच द्विगुण समाकलनों को प्राप्त किया गया है। शोध-पत्र के अंत में कतिपय विशिष्ट दशाएँ भी व्युत्पन्न की गई हैं।

Abstact

Double integrals involving the H-function of two variables. By S. S. Srivastava Department of Mathematics, Govt. College, Jaisingh Nagar, Shahdol (M.P.)

In this paper five double integrals involving the H-function of two variables have been evaluated. Some special cases have also been derived at the end of the research paper.

1. प्रस्तावना

श्रीवास्तव द्वारा प्रदत्त [3] दो चरों के H-फलन को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है—

$$H[x, y] = H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} H^{o, n_1 : m_2, n_2 : m_3, n_3}_{p_1, q_1 : p_2, q_2 : p_3, q_3}$$

$$\times \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(a_j ; \alpha_j , A_j\right)_{1, p_1} : \left(c_j , \gamma_j\right)_{1, p_2} : \left(e_j , E_j\right)_{1, p_3} \\ \left(b_j ; \beta_j , B_j\right)_{1, q_1} : \left(d_j , \delta_j\right)_{1, q_2} : \left(f_j , F_j\right)_{1, q_3} \end{matrix} \right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \phi_1(\xi,\eta)\,\theta_2(\xi)\,\theta_3(\eta)\,x^{\xi}\,y^{\eta}\,d\xi\,d\eta \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi_1(\xi,\eta) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma\left(1-a_j+\alpha_j\xi+A_j\eta\right)}{\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma\left(a_j-\alpha_j\xi-A_j\eta\right)\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma\left(1-b_j+\beta_j\xi+B_j\eta\right)},$$

$$\theta_2(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma\left(d_j-\delta_j\xi\right)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma\left(1-c_j+\gamma_j\xi\right)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma\left(1-d_j+\delta_j\xi\right)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma\left(c_j-\gamma_j\xi\right)},$$

तथा

$$\theta_3(\eta) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma\left(f_j-F_j\eta\right)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma\left(1-e_j+E_j\eta\right)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma\left(1-f_j+F_j\eta\right)\prod_{j=n_3+1}^{p_2}\Gamma\left(e_j-E_j\eta\right)}.$$

2. प्रस्तुत शोधकार्य में हमें निम्नलिखित परिणामों की भी आवश्यकता पड़ेगी—

वाटेकर तथा वाटसन [4,p.253]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\pi}\, e^{i(\alpha-\beta)\theta}\,(\cos\theta)^{\alpha+\beta}\,d\theta = \frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}, \tag{2.1}$$

मैकराबर्ट [1, p. 450-452]

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}\,(\sin\theta)^{\alpha-1}\,(\cos\theta)^{\beta-1}\,d\theta = e^{(1/2)\pi i\alpha}\,\frac{\Gamma\alpha\,\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{2.2}$$

रेनविले [2, p. 9]

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \Gamma\alpha, \tag{2.3}$$

तथा ज्ञात परिणाम

$$\int_0^t x^{\rho-1}(t-x)^{\sigma-1}\,dx = t^{\rho+\sigma-1}\frac{\Gamma\rho\,\Gamma\sigma}{\Gamma(\rho+\sigma)} \tag{2.4}$$

3. इस अनुभाग में हम निम्नलिखित समाकलों की स्थापना करेंगे--

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\pi}\,e^{i(\alpha-\beta)x}\,(\cos x)^{\alpha+\beta}\,e^{i(\sigma+\rho)y}\,(\sin y)^{\sigma-1}\,(\cos y)^{\rho-1}$$

$$\times\, H\left[\left(2e^{i(x+y)}\cos x\sin y\right)^{\lambda}u,\left(2e^{i(y-x)}\cos x\cos y\right)^{\mu}v\right]dx\,dy$$

$$=\frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}}\,e^{(1/2)\pi i\sigma}\,H^{0,n+1:m_2,n_2+1:m_3,n_3+1}_{p_1,q_1+1:p_2+1,q_2+1:m_3+1,n_{3+1}}\left[\begin{matrix}u\left(\frac{1}{2}e^{(1/2)\pi i}\right)^{\lambda}\\ \frac{\upsilon}{2\mu}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}P\\ Q\end{matrix}\right], \tag{3.1}$$

जहाँ

$$P=(-\alpha-\beta;\lambda,\mu)\left(a_j;\alpha_j,A_j\right)_{1,p_1}:(1-\sigma,\lambda)\left(c_j,\gamma_j\right)_{1,p_2}:(1-\rho,\mu)\left(e_j,E_j\right)_{1,p_3}$$

$$Q=(1-\sigma-\rho;\lambda,\mu)\left(b_j;\beta_j,B_j\right)_{1,q_1}:\left(d_j,\delta_j\right)_{1,q_2}(-\alpha,\lambda):\left(f_j,F_j\right)_{1,q_3}(-\beta,\mu);$$

$$\int_0^t\int_0^{\pi/2}x^{\rho-1}\,(t-x)^{\sigma-1}\,\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\pi}\,e^{i(\alpha-\beta)y}\,(\cos y)^{\alpha+\beta}$$

$$\times\, H\left[\left(2xe^{iy}\cos y\right)^{\lambda}u,\left(2(t-x)e^{-iy}\cos y\right)^{\mu}\upsilon\right]dx\,dy$$

$$=t^{\rho+\sigma-1}\,\frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}}\,H^{0,n_1+1:m_2,n_2+1:m_3,n_3+1}_{p_1+1,q_1+1:p_2+1,q_2+1:p_3+1,q_3+1}\left[\begin{matrix}u\left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda}\\ \upsilon\left(\frac{t}{2}\right)^{\mu}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}P\\ Q\end{matrix}\right], \tag{3.2}$$

जहाँ

$$P = (-\alpha-\beta;\lambda,\mu)\left(a_j;\alpha_j,A_j\right)_{1,p_1}:(1-\rho,\lambda)\left(c_j,\gamma_j\right)_{1,p_2}:(1-\sigma,\mu)\left(e_j,E_j\right)_{1,p_3}$$

$$Q = (1-\rho-\sigma;\lambda,\mu)\left(b_j;\beta_j,B_j\right)_{1,q_1}:\left(d_j,\delta_j\right)_{1,q_2}(-\alpha,\lambda):\left(f_j,F_j\right)_{1,q_3}(-\beta,\mu);$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} x^{\sigma-1}\, e^{-x}\, \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\pi}\, e^{i(\alpha-\beta)y}\,(\cos y)^{\alpha+\beta}$$

$$\times H\left[\left(2xe^{iy}\cos y\right)^{\lambda}u,\left(2e^{-iy}\cos y\right)^{\mu}\upsilon\right]dx\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}}\, H^{0,n_1+1:m_2,n_2+1:m_3,n_3}_{p_1+1,q_1:p_2+1,q_2+1:p_3,q_3+1}\left[\begin{array}{c|c} u/2^{\lambda} & P \\ \upsilon/2^{\mu} & Q \end{array}\right], \quad (3.3)$$

जहाँ

$$P = (-\alpha-\beta;\lambda,\mu)\left(a_j;\alpha_j,A_j\right)_{1,p_1}:(1-\sigma,\lambda)\left(c_j,\gamma_j\right)_{1,p_2}:\left(e_j,E_j\right)_{1,p_3}$$

$$Q = \left(b_j;\beta_j,B_j\right)_{1,q_1}:\left(d_j,\delta_j\right)_{1,q_2}(-\alpha,\lambda):\left(f_j,F_j\right)_{1,q_3}(-\beta,\mu);$$

$$\int_0^{t}\int_0^{\pi/2} x^{\rho-1}\,(t-x)^{\sigma-1}\, e^{i(\alpha+\beta)y}\,(\sin y)^{\alpha-1}\,(\cos y)^{\beta-1}$$

$$\times H\left[\left(xe^{iy}\sin y\right)^{\lambda}u,\left((t-x)\,e^{iy}\cos y\right)^{\mu}\upsilon\right]dx\,dy$$

$$= e^{\frac{1}{2}\pi i\alpha}\, t^{\rho+\sigma-1}\, H^{0,n_1:m_2,n_2+2:m_3,n_3+2}_{p_1,q_1+2:p_2+2,q_2:p_3+2,q_3}\left[\begin{array}{c|c} u\,t^{\lambda}e^{(\frac{1}{2})\pi i\lambda} & P \\ \upsilon t^{\mu} & Q \end{array}\right], \quad (3.4)$$

जहाँ

$$P = \left(a_j ; \alpha_j , A_j\right)_{1, p_1}$$

$$Q = (1-\rho-\sigma; \lambda, \mu)\,(1-\alpha-\beta;\, \mu)\left(b_j ; \beta_j , B_j\right)_{1, q_1} :$$

$$(1-\rho, \lambda)\,(1-\alpha, \lambda)\left(c_j , \gamma_j\right)_{1, p_2} : (1-\sigma, \mu)\,(1-\beta, \mu)\left(e_j , E_j\right)_{1, p_3}$$

$$\left(d_j , \delta_j\right)_{1, q_3} : \left(f_j , F_j\right)_{1, q_3} :$$

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} x^{\sigma-1} \quad e^{-x}\; e^{i(\alpha+\beta)y}\; (\sin y)^{\alpha-1}\; (\cos y)^{\beta-1}$$

$$\times\, H\left[\left(xe^{iy}\sin y\right)^{\lambda} u, \left(e^{iy}\cos y\right)^{\mu} \upsilon\right] dx\, dy$$

$$= e^{\frac{1}{2}\pi i \alpha}\; H^{0, n_1 : m_2, n_2+2 : m_3, n_3+1}_{p_1, q_1+1 : p_2+2, q_2 : p_3+1, q_3}\left[\begin{matrix} u\, e^{(\frac{1}{2})\pi i \lambda} \\ \upsilon \end{matrix}\middle| \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right], \qquad (3.5)$$

जहाँ

$$P = \left(a_j , \alpha_j , A_j\right)_{1, p_1} : (1-\sigma, \lambda)\,(1-\alpha, \lambda)\left(c_j , \gamma_j\right)_{1, p_2} : (1-\beta, \mu)\left(e_j , E_j\right)_{1, p_3}$$

$$Q = (-\alpha-\beta; \lambda, \mu)\left(b_j ; \beta_j , B_j\right)_{1, q_1} : \left(d_j , \delta_j\right)_{1, q_2} : \left(f_j , F_j\right)_{1, q_3}$$

3.1 की उपपत्ति : (3.1) के वाम पक्ष में (1.1) का उपयोग करने एवं समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$I = \frac{(-1)}{4\pi^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi_1(\xi, \eta)\, \theta_2(\xi)\, \theta_3(\eta)\, u^{\xi}\, \upsilon^{\eta}$$

$$\times \left(\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}^{(\alpha+\lambda\xi)+(\beta+\mu\eta)+1} \quad e^{i[(\alpha+\lambda\xi)-\beta+\mu\eta)]x}\; (\cos x)^{[(\alpha+\lambda\xi)+(\beta+\mu\eta)]}\, dx \right)$$

$$\times \left(\int_0^{\pi/2} e^{i[(\sigma+\lambda\xi)+(\rho+\mu\eta)]y}\; (\sin y)^{(\sigma+\lambda\xi)-1}\; (\cos y)^{(\rho+\mu\eta)-1}\, dy \right) d\xi\, d\eta.$$

(1.1) की सहायता से विवेचना करने और (2.1) तथा (2.2) परिणामों का उपयोग करने पर हमें (3.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

इसी प्रकार अग्रसर होने पर (3.2) से लेकर (3.5) तक के परिणामों को अनुभाग 2 के ज्ञात परिणामों की सहायता से स्थापित किया जा सकता है।

4. विशिष्ट दशाएँ

1. (3.1) में $\alpha_j = A_j = \beta_j = B_j = \gamma_j = \delta_j = E_j = F_j = \lambda = \mu = 1$ रखें तो

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\pi} e^{i(\alpha-\beta)x} (\cos x)^{\alpha+\beta} e^{i(\sigma+\rho)y} (\sin y)^{\sigma-1} (\cos y)^{\rho-1}$$

$$\times G\left[2e^{i(x+y)} \cos x \sin y\, u,\; 2e^{i(y-x)} \cos x \cos y\, \upsilon \right] dx\, dy$$

$$= \frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}} e^{(1/2)\pi i \sigma} G^{o, n_1+1 : m_2, n_2+1 : m_3, n_3+1}_{p_1+1, q_1+1 : p_2+1, q_2+1 : p_3+1, q_3+1} \left[\begin{matrix} u \frac{1}{2} e^{(1/2)\pi i} \\ \upsilon/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right] \tag{4.1}$$

जहाँ G दो चरों वाला माइजर G-फलन है और

$$P = (-\alpha-\beta; 1, 1)\left(a_j ; 1, 1\right)_{1, p_1} : (1-\sigma, 1)\left(c_j, 1\right)_{1, p_2} : (1-\rho, 1)\left(e_j, 1\right)_{1, p_3}$$

$$Q = (1-\sigma-\rho; 1, 1)\left(b_j ; 1, 1\right)_{1, q_1} : \left(d_j, 1\right)_{1, q_2} (-\alpha, 1) : \left(f_j, 1\right)_{1, q_3} (-\beta, 1).$$

2. (3.2) में $\alpha = \beta$ रखने पर

$$\int_0^t \int_0^{\pi/2} x^{\rho-1} (t-x)^{\sigma-1} \frac{2^{2\alpha+1}}{\pi} (\cos y)^{2\alpha}$$

$$\times H\left[\left(2xe^{iy} \cos y\right)^{\lambda} u, \left(2(t-x)e^{-iy} \cos y\right)^{\mu} \upsilon \right] dx\, dy$$

$$= t^{\rho+\sigma-1} \frac{\pi}{2^{2\alpha+1}} H^{o, n_1+1 : m_2, n_2+1 : m_3, n_3+1}_{p_1+1, q_1+1 : p_2+1, q_2+1 : p_3+1, q_3+1} \left[\begin{matrix} u\left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda} \\ \upsilon(t/2)^{\mu} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \dot{P} \\ Q \end{matrix} \right] \tag{4.2}$$

जहाँ

$$P = (-2\alpha ; \lambda, \mu)\left(a_j ; \alpha_j , A_j\right)_{1, p_1} : (1-\rho, \lambda)\left(c_j , \gamma_j\right)_{1, p_2} : (1-\sigma, \mu)\left(e_j , E_j\right)_{1, p_3}$$

$$Q = (1-\rho-\sigma; \lambda, \mu)\left(b_j ; \beta_j , B_j\right)_{1, q_1} : \left(d_j , \delta_j\right)_{1, q_2} (-\alpha, \lambda) : \left(f_j , F_j\right)_{1, q_3} (-\alpha, \mu).$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में शासकीय माडल साइंस कालेज रीवाँ के गणित के प्रोफेसर डॉ० बी० एम० एल० श्रीवास्तव ने मार्गदर्शन किया जिसके लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. मैकराबर्ट, टी० : Math Anu. 1960-61, 142, 450-452.
2. रेनविले, ई० डी०, : Special function, मैकमिलन 1960
3. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी० : The H-function of one and two variables with applications. South Asian Publishers, New Delhi, 1982.
4. वाटेकर, ई० टी० तथा वाटसन, जी० एम० : A Course of Modern Analysis, चतुर्थ संस्करण, कैम्ब्रिज 1952.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहियं। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 60 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 15 or 3£ or $ 10

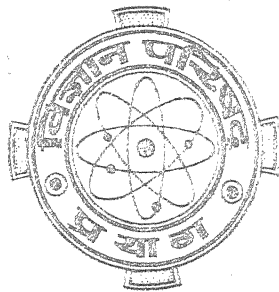
प्रकाशक :
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 40 | July 1997 | No. 3



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

विषय-सूची

Vol. 40 July 1997 No. 3

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 3, July 1997.

राजस्थान के आदिवासियों द्वारा अपनाई जाने वाली कृन्तक नियन्त्रण विधियाँ

सतीश कुमार शर्मा

क्षेत्रीय वन अधिकारी, अरावली वृक्षारोपण परियोजना, झाडोल (फ०), जिला उदयपुर (राज०)

[प्राप्त- जनवरी 1, 1997]

सारांश

चूहे, मूषक, गिलहरी, सेही आदि कुतर कर खाने वाले प्राणी कृन्तक कहलाते हैं। राजस्थान में स्तनधारियों का यह सबसे बड़ा संवर्ग है। ये घरेलू सामान, कृषि, बागवानी एवं वन फसलों को बहुत भारी नुकसान पहुँचाते हैं। राजस्थान के आदिवासी स्वनिर्मित अनेक परम्परागत सरल विधियों का प्रयोग कर कृन्तकों का नियन्त्रण करने में निपुण होते हैं।

Abstract

Rodent controlling methods of tribals of Rajasthan. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Aravalli Afforestation Project, Jhadol(F.), Distt. Udaipur (Raj.).

Rats, mice, squirrels, porqupines and their kinsfolk are classified as Rodentia, the rodents or gnawing animals. Both in species and in number this is quite the largest single group of mammals in Rajasthan. They take a very heavy toll from store goods, agriculture, horticulture and forestry sectors. Rodents are controlled by tribals of Rajasthan by using various types of simple self deviced indigenous methods.

कृन्तक कुतर कर खाना खाने वाले प्राणी हैं। राजस्थान में स्तनधारियों का यह सब से बड़ा वर्ग है। राजस्थान में कृन्तकों पर बहुत अधिक कार्य हुआ है। विश्वप्रसिद्ध वैज्ञानिक ईश्वर प्रकाश

तो जैसे कृन्तकों के पर्याय हो चुके हैं। केन्द्रीय शुष्क क्षेत्र अनुसंधान संस्थान, जोधपुर में भी कृन्तकों पर काफी कार्य हुआ है। संदर्भित विभिन्न लोगों के कार्यों से राजस्थान के कृन्तकों एवं उनसे जुड़े अनेक पहलुओं पर अच्छी तरह जानकारी मिलती है ।[1-17]

जैसा ऊपर लिखा गया है, कृन्तक राजस्थान का सबसे बड़ा स्तनी वर्ग है। राजस्थान के महत्वपूर्ण कृन्तक निम्न हैं:-

1. *Funambulus Pennanti*
2. *Petaurista petaurista philippensis*
3. *Hystrix indica indica*
4. *Vandeleuria oleracea spadioea*
5. *Gerbillus nanus indus*
6. *G. gleadowi*
7. *Tatera indica indica*
8. *Meriones hurrianae*
9. *Rattus rattus rufesoens*
10. *R. Meltada pallidior*
11. *R. gleadowi*
12. *Mus Musoulus bactrianus*
13. *M. Booduga bocduga*
14. *M. Servicolor phillipsi*
15. *M. Platythrix Sadhu*
16. *M. terricolor*
17. *Golunda ellioti gujerati*
18. *G. ellioti watosoni*
19. *Acomys oahirinus flavidus*
20. *Bandicota banidicota bengalensis*
21. *Nesokia indica indica*
22. *Cremnomys outohicus*

उपर्युक्त कृन्तकों में उडनगिलहरी (*Petaurista Petaurista Philippensis*) पूर्णतया वनों में निवास करने वाली प्रजाति है जो किसी समय दक्षिणी राजस्थान के सघन वनों में दूर-दूर तक निवास करती थी। लेकिन वर्तमान में केवल सीतामाता अभयारण्य में ही ज्ञात है। संभवतः यह कुछ गिनेचुने स्थानों में फुलवारी की नाल अभयारण्य में भी उपस्थित हो सकती है। यह प्रजाति कृषि क्षेत्र को कोई नुकसान नहीं पहुँचाती है। खेतों में बुवाई से लेकर पकने तक, खलिहान से भण्डारण तक कृदन्तक काफी नुकसान पहुँचाते हैं। सेही राजस्थान का सबसे बड़ा कृन्तक है। यह कंदीय फसलों को खोद कर खा जाती है। इसके नियमित आने जाने से पगडंडियों जैसे पथ बन जाते हैं। वर्षा ऋतु में जब घास बड़ी हो जाती है तो सेही के निकलने से घास में स्पष्ट पगडंडियाँ बन जाती हैं। जहाँ एरिस्टिडा घास उगी हो वहाँ ये पगडंडियाँ ज्यादा स्पष्ट बनती हैं। इन पगडंडियों तथा मनुष्य के छोटे बच्चों जैसे पदचिन्हों को देख तथा कुतरने व खोदने के चिन्हों से किसान सेही की उपस्थिति का आभास कर लेते हैं।

कृन्तक पूरे राजस्थान में फैले हुए हैं। पश्चिमी राजस्थान में कृन्तकों की कोई 18 जातियाँ पाई जाती हैं। इन्दिरा गाँधी नगर से सिंचाई होने के कारण कृषि-पद्धतियाँ बदलने एवं आवास-परिवर्तन से कृन्तकों की उपस्थिति में नये परिवर्तन आने लगे हैं।

वर्तमान समय में कृन्तकों को नियन्त्रित करने की अनेक विधियाँ वैज्ञानिकों ने खोज निकाली हैं। परन्तु प्राचीन काल में उनके नियन्त्रण की कुछ अत्यंत सरल विधियाँ प्रचलन में थीं। राजस्थान की कई आदिम जातियों जैसे झील, मीणा, गरासिया, सहारिया, कथौडी आदि में आज भी इन विधियों की एक झलक देखी जा सकती है। इन विधियों में से अनेक ग्राम्य समाज की अन्य जातियों द्वारा भी अपनाई जाती हैं। इस प्रपत्र में इन्हीं विधियों का संक्षिप्त वर्णन दिया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन राजस्थान, विशेषतया दक्षिण राजस्थान तथा गुजरात एवं मध्य प्रदेश के सीमावर्ती भागों में 1986 से 1996 तक किया गया। इन क्षेत्रों में भील, मीणा, भील मीणा, कथोडी, सहारिया, गरासिया आदि आदिवासी जातियों के परम्परागत कृन्तक नियन्त्रण तकनीकों की जानकारी ग्रामीण क्षेत्रों में जा कर संग्रह की।

अध्ययन प्रक्रिया

जगह-जगह ग्रामीण क्षेत्रों में घरों में जा कर लोगों द्वारा अपनाई जाने वाली कृन्तक नियन्त्रण विधियाँ देखी गई। कृषि फसलों की बुवाई, कटाई से ले कर अन्न भण्डारण तथा विभिन्न अवस्थाओं में कृन्तक नियन्त्रण विधियों का मौके पर अध्ययन किया गया।

विविध नियन्त्रण विधियाँ

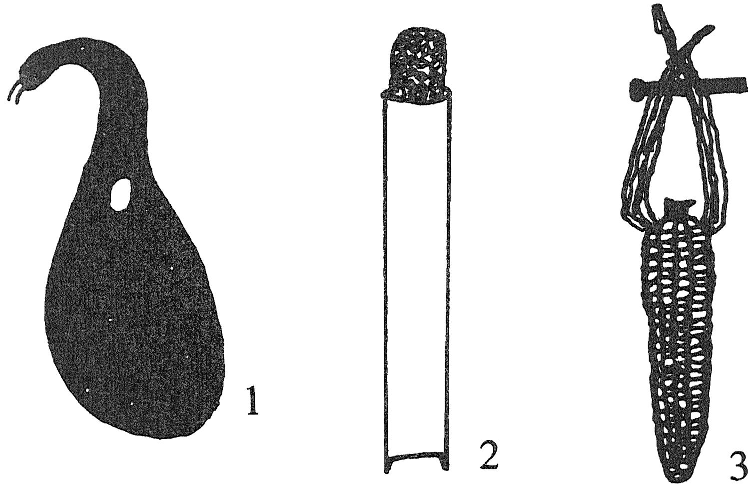
कृन्तकों की राजस्थान में विविधता एवं अधिकता में कोई कमी नहीं है। कृन्तक फसलों तथा अन्य घरेलू सामान को बहुत नुकसान पहुँचाते हैं तथा अनेक बीमारियों को भी फैलाते हैं।

राजस्थान में आदिवासियों द्वारा कृन्तक निम्न लिखित तीन महत्वपूर्ण कारणों से मारे जाते हैं :-

1. कृषि एवं घरेलू सामाग्री सुरक्षा हेतु
2. भोजन हेतु
3. दवाओं हेतु।

कृषि एवं घरेलू सामग्री की सुरक्षा

कृषि सुरक्षा हेतु अनेकों तरह की युक्तियाँ खेतों में लगाई जाती हैं । दक्षिण राजस्थान में मक्की की फसल कटते ही कई जगह कथोडी खेतों में अपनी देशज युक्तियों से चूहे पकड़ते हैं। आदिवासी लोग घरों में अनाज को मिट्टी से बनी हुई कोठियों में सुरक्षित रखते हैं ताकि चूहे एवं अन्य नाशक जीव दूर रहें। वे बांस की पोली नलियों तथा घीया (*Laginaria indica*) के सूखे फलों को पोला बना कर उनमें अनाज व बुवाई के अन्य महत्वपूर्ण बीजों को संग्रह करते हैं (चित्र 1) । घीया फल से बने संग्राहक में ऊपरी छोर के पास बगल में बीज अन्दर डालने के लिए एक छेद बनाया जाता है। इस छेद को बीज भरने के बाद मोम से बंद कर दिया जाता है। बांस की नली एवं घीया फलों में अनाज भरने के छेद में मक्का के भुट्टे की बीजरहित ''टूंडी'' की डाट लगाई जाती है (चित्र 2) । प्रायः इन संग्राहकों को भूमि पर न रख कर छप्पर में किसी रस्सी आदि के सहारे लटका कर रखा जाता है, ताकि चूहे आसानी उन तक पहुँच नहीं सकें। आने वाले साल की बुवाई हेतु मक्का के भुट्टों को खूँटियों से भी लटका कर रखते हैं ताकि चूहे उन्हें नुकसान नहीं पहुँचाएँ (चित्र 3) ।



चित्र 1 : घिया के सूखे फल से बनाया गया बीज संग्राहक । चित्र 2 : पोले बाँस से बनाया गया बीज संग्राहक । चित्र 3 : खूँटी से लटकाई गई बीजू मक्की का भुट्टा ।

खेतों के अलावा घरों में भी चूहों का बड़ा प्रकोप रहता है। घरों की दीवार, आंगन, आटे की चक्की के नीचे, अन्न संग्राहक कोठियों के पास या अन्दर तक ये बिल बनाने से नहीं चूकते। घरों में केलू-पोश छतें भी चूहों को छिपने का अच्छा स्थान प्रदान करती हैं।

खेतों एवं घरों में कृन्तक नियन्त्रण की कुछ प्रचलित विधियाँ निम्नवत् हैं -

(अ) पकड़ने/मारने की विधियाँ

(ब) खदेड़ने की विधियाँ

(स) जैविक नियन्त्रण

(अ) पकड़ने/ मारने की विधियाँ

1. गिलोल व तीर से :- घरों में इस विधि को काम में लिया जाता है। चूहा बहुत शंकालु प्रवृत्ति का प्राणी है। मनुष्य के पास होने का आभास होते ही वह भाग जाता है। चूहे को किसी तरह का अंदेशा न हो अतः गिलोल एवं तीर से काफी दूर से ही प्राणी को निशाना साध कर मारा जाता है।

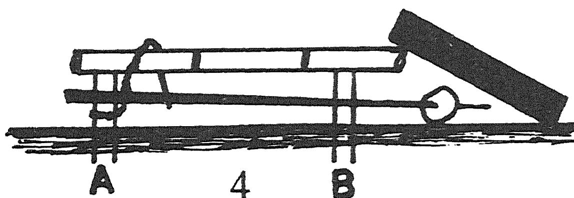
2. लकड़ी या झाडू के प्रहार से :- कई व्यक्ति घर में चूहे को घेर कर बिल में जाने से रोकते हैं तथा लकड़ी या झाडू से मार देते हैं। सेही को भाले एवं लकड़ी से मारते हैं।

3. बिल खोद कर :- बिल को खोद कर चूहे निकालने में कथौड़ी ज्यादा निपुण होते हैं। सेही की गुफा को खोद कर उसे भाले, लकड़ी आदि से मारा जाता है। धुँवा कर के भी उसे निकालते हैं।

4. बिलों में पानी भर कर :- चूहों के बिलों में पानी भर कर निवासी चूहे को मजबूर कर बाहर निकाला जाता है। कई बार बिलों में पत्थर, कंकड़, रेत आदि भर कर बिल को अच्छी तरह बंद किया जाता है ताकि चूहा अन्दर ही रह जाये।

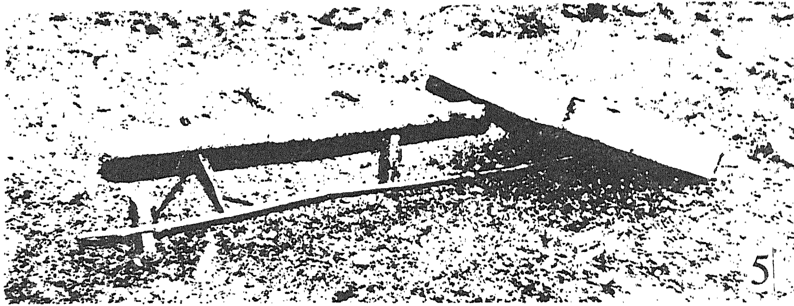
5. मटका विधि :- यह विधि घरों के अन्दर काम में ली जाती है। एक बड़े मटके को भूमि में गर्दन तक गाड़ा जाता है। उसे आधा पानी से भर कर मक्की की खील पानी में डाल दी जाती है। कुछ खीलों के दाने मटके के आस-पास भी डाले जाते हैं। चूहे तथा मूषक आस-पास के बिलों से आकर्षित हो कर पानी पर तैरती खीलों तक पहुँचने के प्रयास में अन्दर गिर जाते हैं।

6. पत्थर-बांस के मारक यंत्र से :- यह विधि घरों व खेतों में समान रूप से काम में ली जाती है। बांस की दो खूंटियाँ लगभग 30-45 सेमी. की दूरी पर इस तरह गाड़ी जाती हैं कि वे भूमि से लगभग 7 से 10 सेमी बाहर रहें। इन खूंटियों



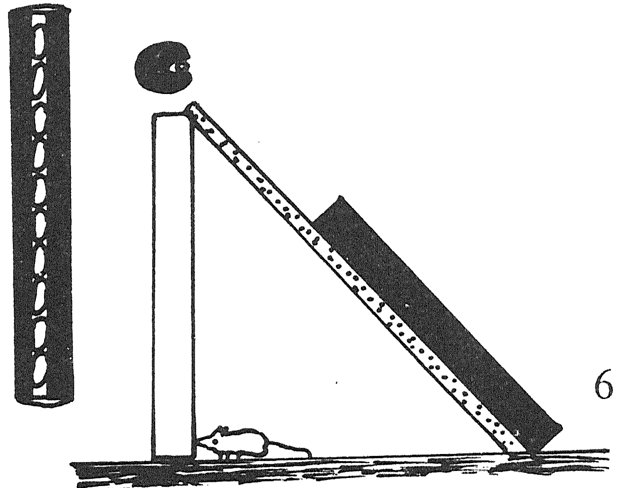
चित्र 4 : पत्थर बाँस के मारक यंत्र का स्थापना आरेख।

के शीर्ष पर एक गोल बांस का डण्डा लगभग 45-55 सेमी. लम्बा रखा जाता है एवं बांस की एक पतली डण्डी खूंटी "ए" से बाँधी जाती है। डंडी के दूरस्थ सिरे पर एक रोटी का टुकड़ा फँसाया जाता है। "बी" खूट की तरफ बांस के गोल डण्डे के सहारे चौकोर पत्थर तिरछा इस प्रकार रखा जाता है कि रोटी इसके नीचे रहती है। खूंटी "ए" पर एक छोटी डोरी की मदद से एक बांस की छोटी कीलनुमा पत्ती बंधी होती है जो ट्रिगर का काम करती है। ट्रिगर की डोरी को बांस के गोल डण्डे के ऊपर से निकाल कर पतली डण्डी के पास ट्रिगर की नोक को इस तरह लगाते हैं कि रोटी को खाने के प्रयास में डण्डी तनिक हिलते ही ट्रिगर की फंसी नोक हट जाती है तथा बांस का गोल डंडा खूंटियों पर से नीचे लुढ़क जाता है। उधर टेक हटते ही पत्थर नीचे गिर कर रोटी खा रहे कृन्तक को दवा कर मार देता है (चित्र 4 एवं 5)। चूहे, मूषक, गिलहरी इस विधि से मारे जाते हैं। कभी-कभी छछुन्दर जैसा निरापद जीव भी इस मारक यंत्र का शिकार बन जाता है।



चित्र 5 : पत्थर बाँस के मारक यंत्र का दूसरा आरेख।

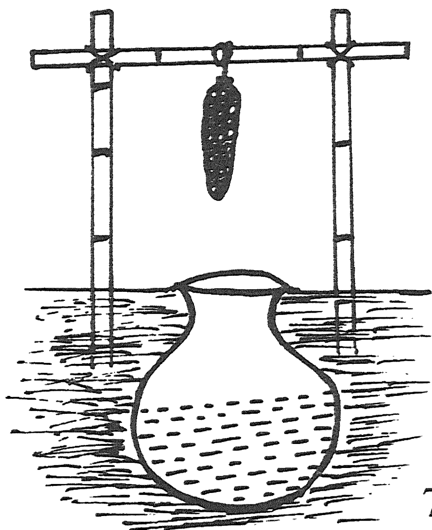
7. बांस-गेहूं के मारक यंत्र सेः- इस विधि में बांस का एक छोटा डण्डा लिया जाता है। इसमें आर-पार एक खांच गेहूँ के दाने की चौड़ाई के बराबर चौड़ी तथा चौड़ाई से दुगुनी गहरी बनाई जाती है। इस खांच में गेहूँ के दाने धंसा कर डंडे को एक खम्बे की तरह खड़ा कर इस पर बांस से बनी छोटी चटाई तिरछी अवस्था में रखी जाती है। चटाई के ऊपर सहारा दे कर एक पत्थर का चौका रखा जाता है। बांस के डण्डे से गेहूँ के दाने निकालने के प्रयास में डण्डे के गिरने से चूहा दब कर मर जाता है। (चित्र 6)।



चित्र 6 : बाँस गेहूँ के मारक यंत्र । पास में गेहूं बांस का डंडा दिखाया गया है । शीर्ष पर डन्डे का अनुप्रस्थ काट (T.S.) दिखाया गया है ।

8. सींग के बने फन्दे से:- जंतुओं के एक सींग को बीचो-बीच कर दो समान पाटों में बाँटा जाता है। दोनों छोरों पर बकरे की तांत को बट लगा कर इसमें तनाव पैदा किया जाता है। तनाव की वजह से दोनों अर्द्धांश सिमट कर एक दूसरे के पास आ जाते हैं। दोनो पाटों को खुला रखने के लिये एक बांस की पत्ती का ताला रखा जाता है जिसे अटकाने पर दोनों पाट खुले रहते हैं। 'ताले' के शीर्ष पर मक्की के एक बड़े दाने में छेद कर धागा पिरो कर बांधा जाता है। जैसे ही कृन्तक दाने को खाने का प्रयास करता है 'ताला' अपनी स्थिति से खिसक जाता है तथा पलक झपकते ही दोनों अर्द्धांश खट की आवाज के साथ शिकार को जकड़ लेते हैं तथा शिकार की मृत्यु हो जाती है। इस विधि से फाख्ता, कबूतर, तीतर, मोर आदि भी पकड़े जाते हैं।

9. मक्की के भुट्टे द्वारा :- भूमि में एक मटका इस तरह गाड दिया जाता है कि उसका मुंह भूमि तल पर रहता है। इस मटके में आधी ऊंचाई तक पानी भर कर उसमें कुछ ताजा गोबर घोल दिया जाता है। इस मटके के मुँह के इधर-उधर लगभग 30 सेमी० के अंतराल पर लगभग 45-45 सेमी० ऊँचाई के बांस के दो डण्डे गाड़ दिये जाते हैं। इन डण्डों के सहारे बांस का एक क्षैतिज डण्डा ऊपर बाँध दिया जाता है। अब मक्की के एक भुट्टे को डोरी से झूलता हुआ क्षैतिज डण्डे से बांध कर इस तरह लटकाया जाता है कि भुट्टा भूमि से लगभग 15 सेमी० ऊँचा रहे। चूहा पिछले पैरों पर खड़ा हो कर भुट्टे तक पहुँचने के प्रयास में मटके में गिर जाता है तथा कुछ देर बाद डूब कर मर जाता है (चित्र 7)



चित्र 7 : मक्की के भुट्टे एवं मटके द्वारा चूहे पकडने का आरेख ।

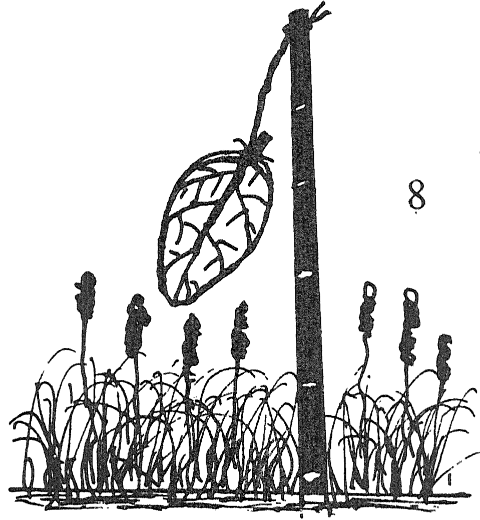
(ब) खदेड़ने वाली विधियाँ

1. छाछ से : - दक्षिण राजस्थान में आदिवासी लोग सेही के आने जाने के रास्तों में छाछ डाल देते हैं। उनका विश्वास है कि छाछ की गंध से वह स्वयं के रास्ते पर अपनी गंध को समझ नहीं पाती तथा भ्रमवश पुराने रास्ते छोड़ कर नये रास्ते बना लेती है ।

2. वनस्पतियों के उपयोग से :- घरों में चूहों के बिलों में कौंच (*Mucuna indica*) तथा घोड़ा कौंच (*Zerardinia Zeylanica*) के फलों को रख देते हैं। इनके फलों पर छोटे-छोटे तीक्ष्ण काँटे होते हैं जो चूहों-मूषकों के मुँह, नाक, कान आदि में लग जाते हैं। लोगों का मानना है कि उसे कापी बैचेनी होती है तथा वह बिल में वापिस नहीं आता।

3. खजूरों के वृक्षों में आग से सूखी पत्तियाँ जलाना :- खजूर के वृक्षों में आग लगा कर उनके तनों पर लगें स्थाई पर्णाधार तथा सूखी लटकती पत्तियों को जला कर पूरी तरह साफ किया जाता है ताकि गिलहरियाँ वहाँ घुस नहीं सकें तथा घोसला नहीं बना सकें। आवश्यकता पड़ने पर ऐसे खजूरों में चढ़ कर गिलहरी को खदेड़ कर भगा दिया जाता है। खजूरों में गर्मी के मौसम में आग लगाते हैं।

4. जालरा विधिः- यह विधि रबी फसल में गेहूँ-जौ की चूहों से सुरक्षा हेतु उपयोग में ली जाती है। आदिवासी लोग चूहों को भगाने के लिए जालरों का निर्माण करते हैं। बांस के लम्बे डण्डे के ऊपरी छोर पर खजूर की पत्ती के अक्ष से ली गई लम्बी फाड की मदद से सागवान (*Tectona grandis*) की एक पत्ती बाँध कर लटकाई जाती है। सूखने पर, हवा के झोकों से पत्ती हिल-डुल कर बांस सेटकराती है जिससे खड़-खड़ की आवाज पैदा होने लगती है। इस आवाज से खेतों के बाहर से आने वाले चूहे खेत में नहीं आते तथा खेतों में उपस्थित चूहे भी घबरा कर बिलों में छुपने का प्रयास करते हैं। रात्रि में जालरों के डण्डों के छोर पर उल्लू भी आ कर बैठते हैं जो चूहों का नियन्त्रण करने में काफी मददगार साबित होते हैं। (चित्र 8)



चित्र 8 : खेत में लगाया गया जालरा ।

(स) जैविक नियन्त्रण

जैविक नियन्त्रण वह विधि है जिससे मनुष्य के अलावा दूसरे जीव अन्य जीवों की संख्या पर नियन्त्रण रखते हैं। आदिवासी निम्न तरह कृन्तकों का नियन्त्रण करते हैं:

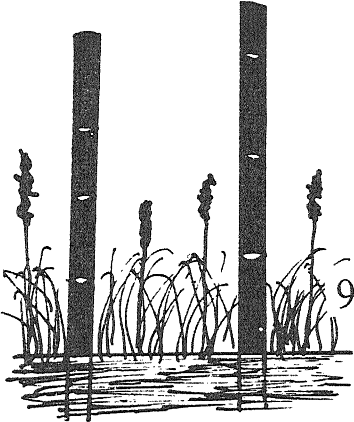
1. बिल्लियों द्वारा : घरेलू बिल्ली पाल कर कृन्तकों पर नियन्त्रण किया जाता है।

2. झाऊ चूहों द्वारा : जंगलों से झाऊ चूहे पकड़ कर घर में छोड़ दिये जाते हैं। कुछ दिनों उपरान्त इन्हें वापिस जंगल में छोड़ दिया जात है। झाऊ चूहे घरेलू चूहों को नष्ट करने में सक्षम हैं।

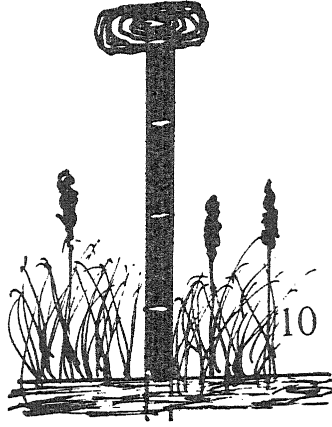
3. उल्लुओं द्वारा : खेतों में चूहों को नियन्त्रिक करने के लिये उल्लुओं को आकर्षित करने के लिए उन्हें बैठने के उपयुक्त स्थान (*Owl perohes*). प्रदान किये जाते हैं। स्थानीय भाषा में इन्हें "गाडला" या "रखवालिया" भी कहा जाता है। ये निम्न प्रकार के होते हैं :-

(i) साधारण डण्डे:- बांस के डंडे खेतों में जगह-जगह खड़े किये जाते हैं (चित्र 9) ।

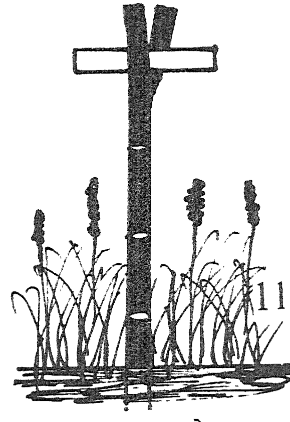
(ii) कुशन युक्त डण्डे:- डण्डों के ऊपरी सिरों पर सागवान (*Tectona grandis*) की पत्तियों का गोल कुशन बना कर रखा जाता है ताकि उल्लू आराम से बैठ सके (चित्र 10)। जहाँ सागवान की पत्तियाँ उपलब्ध नहीं हो वहाँ गोबर के सूखे उपले लगाये जाते हैं। इस काम में पुराने जूतों एवं मृत पशुओं की खोपड़ियों व हड्डियों तक का उपयोग किया जाता है।



चित्र 9 : साधारण डण्डे से बनाया गया उल्लू के बैठने का स्थान ।



चित्र 10 : कुशन युक्त उल्लू के बैठने का स्थान ।

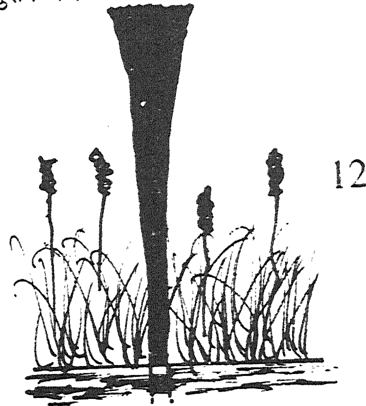


चित्र 11 : क्रास छोर उल्लू के बैठने का स्थान ।

(iii) क्रास छोर डंडे:- कई बार बांस के डंडों के ऊपरी भाग को फाड़ कर उसमें क्षैतिज स्थिति में एक 15-20 सेमी० का पतला डंडा फंसा दिया जाता है ताकि उस पर दो उल्लू (नर एवं मादा) बैठ सकें (चित्र 11)।

(iv) खजूर के पुराने पर्ण अक्ष गाड कर :- खजूर के पुराने पर्ण अक्षों को उल्टा गाडा जाता है (चित्र 12) । इससे पर्णाधार वाला चौड़ा भाग ऊपर की तरफ रहता है तथा उस पर उल्लू आराम से बैठ सकता है। कई बार पर्ण अक्ष के निचले भाग को बांस के डण्डे में क्षैतिज रूप में लगा कर भी उल्लू को बैठने की जगह दी जाती है।

उल्लू पर्चों पर दिन में ब्लेक ड्रोगों, बुश चैट आदि भी आ कर बैठते हैं तथा कीटों का सफाया करते हैं। इन पर्चों पर या आस-पास पड़ी बीट भी पक्षियों द्वारा उनके उपयोग करने की तरफ इशारा करती है।



चित्र 12 : खजूर के पुराने पर्ण अक्ष से बनाया गया उल्लू का विश्राम स्थल ।

भोजन हेतु

चूहे तथा सेही भोजन के रूप में काम में लिये जाते हैं। सेही का मांस अधिकांश आदिवासियों द्वारा पसंद किया जाता है। चूहे केवल कथौड़िया द्वारा खाये जाते हैं।

दवाओं हेतु

कृन्तकों का औषधीय महत्व भी है जो इस लेख से सम्बन्धित न होने के कारण पृथक लेख के रूप में भविष्य में प्रस्तुत किया जायेगा।

विवेचना

कृन्तक नियन्त्रण की विधियों का अध्ययन करने से सहज आभास होता है कि किस तरह मनुष्य के प्राचीन समय में इन नाशकजीवों को नियन्त्रित करने के प्रयत्न किये होंगे। इन विधियों में अनेकों का आज भी प्रचलन है। हाल ही में दक्षिण राजस्थान में लोग खेतों के चारों तरफ पत्थरों की बिना चूना या सीमेंट के सूखी चिनाई द्वारा दीवार बनाने लगे हैं। प्रकाश तथा सिंह [10] के अनुसार कच्छ चट्टानी चूहा (Cutch Rock Rat) (*Cremnomys outohicus*) आस-पास से आ कर सूखी दीवारों में बसेरा करना शुरू कर देते हैं। ये चूहे रात्रि में फसल को नुकसान पहुँचाते हैं। अतः अच्छा रहे की पत्थरों की सूखी दीवार के बजाय वैकल्पिक बाडबंदी की जाये। प्रकाश [18] के अनुसार पूर्वी भारत में कृतकों से बचाव हेतु अन्य फसलों के चारों तरफ अदरख को बोया जाता है। अदरक की गंध से खेत में कृन्तक नहीं आते। दक्षिणी राजस्थान में जहाँ अदरक पैदा किया जाता है, उसे इस तरह बोया जाना चाहिए ताकि उसके घेरे में अन्य कृतक संवेदनशील फसलें सुरक्षित रह सकें।

गाँवों में कई जगह चूहों को गणेशजी का वाहन मान कर मारा नहीं जाता तथा गाँव के बाहर ले जाकर उन्हें पिंजरों आदि से छोड़ दिया जाता है। इस तरह छोड़े चूहे फिर वापिस आ जाते हैं। अतः चूहों को मारना ही उचित रहेगा। वृक्षीय चूहे (*Vandeluria oleracea*) सर्दियों में बया पक्षियों के घोसलों में निवास करने के लिए वृक्षों पर चढ़ जाते हैं। इस जाति के चूहे तथा मीरीयोनीज हरियानी जाति के चूहे जैन्थियम इन्डिकम नामक खरपतवार के बीजों को नष्ट कर किसानों की सेवा भी करते हैं।

निर्देश

1. अडवानी, आर० तथा माथुर, आर० जी० : JBNHS, 1982.

2. अडवानी, आर० तथा राना, बी० डी० : JBNHS, 1984, 81(2), 394-98

3. चावला, आर० : JBNHS, 1996, 93(2), 287-88

4. जैन, ए० जी० : JBNHS, 1984, 81(1), 182

5. तहसीन, आर० : JBNHS, 1996, 93(2), 286

6. परवीन, एफ० तथा करयम, एन० : JBNHS, 1990, 87(3), 448-49

7. प्रकाश, आई० : इकालॉजी एण्ड जू जियोग्राफी आफ मैमल्स, 1995

8. प्रकाश, आई० : मैमल्स आफ दी डेजर्ट, 1996

9. प्रकाश, आई० : सवर्णन, ए० तथा सिंह, पी० : JBNHS, 1995, 92(3), 372-77

10. प्रकाश, आई० तथा सिंह, पी० : JBNHS, 1995, 92(2) , 259

11. राना, बी० डी० : JBNHS, 1980, 77 (3), 501

12. राना, बी० डी०, तथा सोनी, बी० के० : JBNHS, 1981, 78(2), 370-72

13. राना, बी० डी० तथा प्रकाश, आई० :JBNHS, 1984, 81(1), 59-70

14. शर्मा, एस० के० : JBNHS, 1994, 91(3), 449

15. शर्मा एस० के० : JBNHS, 1995, 92(1), 116-18

16. सक्सेना, वाई० तथा सक्सेना, के० : JBNHS, 1994, 91(3),448-49

17. सिंह, सी० तथा सिंह, आर० : JBNHS, 1998, 77(3), 498-500

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 3, July 1997.

कई चरों वाले फाक्स के H-फलन तथा त्रिकोण भित्तीय कोटिज्याओं के गुणनफलों के लिए जूनियर बेसेल श्रेणी

एस० डी० बाजपेयी

गणित विभाग, बहरीन विश्वविद्यालय,
ईसा टाउन, बहरीन

[प्राप्त - अप्रैल 7, 1994]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में कई चरों वाले फाक्स के फलन तथा त्रिकोणमितीय कोटिज्याओं के गुणनफलों के लिए एक फूरियर बेसेल श्रेणी की स्थापना की गई है।

Abstract

Fourier Bessel series for the products of Fox's H-function of several variables and trigonometric cosines. *By* S. D. Bajpai, Department of Mathematics, University of Bahrain, P. O. Box 32038, Isa Town, Bahrain

In this paper, we establish one Fourier Bessel series for the products of Fox's H-function of several variables and trigonometric cosines.

1. प्रस्तावना

गत तीन दशकों में कई गणितज्ञों ने दो तथा कई चरों वाले G तथा H फलनों के प्रसारों तथा विविध फरियर श्रेणी प्रस्तुत करने के प्रयास किये हैं[5, 6, 7]।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य कई चरों वाले फाक्स के H-फलन तथा त्रिकोणमितीय कोटिज्याओं के गुणनफलों की स्थापना बहुपद समाकल की सहायता करना है।

गई गणितज्ञों ने फाक्स के H-फलन[3] के सार्वीकरण का प्रयास किया है और दो तथा कई चरों वाले फाक्स के H-फलन की परिभाषा दी है।

इस प्रपत्र में कई चरों वाला फाक्स का H-फलन निम्नवत् प्रदर्शित किया जावेगा।

$$H\begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{bmatrix} \equiv H^{0,n;m_1,n_1;\dots;m_r,n_r}_{p,q;p_1,q_1;\dots;p_r,q_r}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix}\middle| \begin{matrix} A;C_{p_1};\dots;C_{p_r} \\ \\ B;D_{q_1};\dots;D_{q_r} \end{matrix}\right]$$

$$= H^{0,n;m_1,n_1;\dots;m_r,n_r}_{p,q;p_1,q_1;\dots;p_r,q_r}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \left(a_j;\alpha'_j,\dots,\alpha_j^{(r)}\right)_{1,p}: \\ \left(b_j;\beta'_j;\dots;\beta_j^{(r)}\right)_{1,q}: \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \left(c'_j,\gamma'_j\right)_{1,p_1};\dots;\left(c_j^{(r)},\gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d'_j,\delta'_j\right)_{1,q_1};\dots;\left(d_j^{(r)},\delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix}\right] \quad . \tag{1.1}$$

2. बहुपद समाकल

जिस बहुपद समाकल का मान निकालना है वह है।—

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_1^{s_1-1} \dots s_r^{s_r-1} \cos x_1 \dots \cos x_r \, J_{\nu_1}(x_1) \dots J_{\nu_r}(x_r)$$

$$H\begin{bmatrix} z_1 x^{2t_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r x^{2t_r} \end{bmatrix} dx_1 \dots dx_r = 2^{\nu_1+\dots+\nu_r-r} \, H^{o,n;m_1+1,n_1+1;\dots;m_r+1,n_r+1}_{p,q;p_1+3,q_1+1;\dots;p_3,q_r+1}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix}\middle| \begin{matrix} A; \\ \\ B; \end{matrix}\right.$$

$$\left(1-\frac{v_1+s_1}{2}, t_1\right), C_{p_1}, \left(\frac{1-v_1-s_1}{2}, t_1\right)\left(1+v_1-s_1, 2t_1\right); \ldots ;$$
$$\left(1-\frac{v_r+s_r}{2}, t_r\right), C_{p_r}, \left(\frac{1-v_r-s_r}{2}, t_r\right)\left(1+v_r-s_r, s\, t_r\right)$$
$$\left(\frac{1}{2}-s_1, 2t_1\right), D_{q_1}; \ldots ; \left(\frac{1}{2}-s_r, 2t_r\right), D_{q_r}\Bigg]$$

$\operatorname{Re}(s_i + v_i) + 2t_1 \min\limits_{1 \le j \le m_1} \left[\operatorname{Re} d_j/\delta_j\right] > 0 \ (i = 1, \ldots, r)$; $\operatorname{Re} s_i + 2t_i \max\limits_{i \le j \le n_i}$ $\left[\operatorname{Re}(c_j - 1)/\gamma_j\right] < 1/2 \ (i = 1, \ldots, r)$ तथा [7, pp.252-253, (C.4), (C.5) एवं (C.6)] में दिए प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है।

उपपत्ति : (2.1) की स्थापना के लिए समाकल्य में H-फलन को [7, p.251, (C.1)] के रूप में व्यक्त करते हैं, x तथा y समाकलों के क्रमों को बदलते हैं, [2, p.328, (11)] की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान निकालते हैं तथा [7, p. 251, (C-1)] का उपयोग करते हैं।

टिप्पणी 1. समाकल (2.1) को समाकल [8, p. 94,(2.1)] के कई चरों वाले अनुरूप के रूप में देखा जा सकता है।

3. फूरियर-बेसेल श्रेणी

जिस फूरियर-बेसेल श्रेणी की स्थापना की जानी है वह है

$$x^{s_1} \ldots x^{s_r} \cos x_1 \ldots \cos x_r \; H\begin{bmatrix} z_1 x^{2t_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r x^{2t_r} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{u_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{u_r=0}^{\infty} \frac{(2u_1 + t_1 + 1) \ldots (2u_r + t_r + 1)}{2-(w_1 + \ldots + w_r) - 2(u_1 + \ldots + u_r) - r}$$

$$\times H^{o, n; m_1+1, n_1+1; \ldots ; m_r+1, n_r+1}_{p, q; p_1+3, q_1+1; \ldots ; p_r+3, q_r+1}\left[\begin{array}{c|c} z_1 & A; \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & B; \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{1-w_1-2u_1-s_1}{2}, t_1\right), C_{p_1}, \left(-\frac{w_1+2u_1+s_1}{2}, t_1\right)\left(2+w_1+2u_1-s_1, 2t_1\right)$$

$$\left(\frac{1-w_r-2u_r-s_r}{2}, t_r\right), C_{p_r}; \left(-\frac{w_r+2u_r+s_r}{2}, t_r\right)\left(2+w_r+2u_r-s_r, 2t_r\right)$$

$$\left.\left(\frac{1}{2}-s_1, 2t_1\right), D_{q_1}; \ldots; \left(\frac{1}{2}-s_r, 2t_r\right), D_{q_r}\right]$$

(3.1)

$$J_{w_1} + 2u_1 + 1(x_1) \ldots J_{w_r+2u_r+1}(x_r)$$

जो (2.1) तथा (3.3) के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

उपपत्ति : माना कि

$$x^{s_1} \ldots x^{s_r} \cos x_1 \ldots \cos x_r \, H\begin{bmatrix} z_1 x^{2t_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r x^{2t_r} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{u_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{u_r=0}^{\infty} C_{u_1, \ldots, u_r} J_{w_1} + 2u_1 + 1\left(x_1\right) \ldots J_{w_r+2u_r+1}\left(x_r\right) \tag{3.2}$$

(3.2) के दोनों पक्षों में $x_1^{-1} \ldots x_r^{-1} J_{w_1+2v_1+1}\left(x_1\right) \ldots j_{w_r+2v_r+1}\left(x_1\right)$ से गुणा करने तथा $x_1, \ldots, x_r$ के प्रति 0 से ∞ तक समाकलित करने एवं (2.1) तथा बेसेल फलनों [4, p.291, (6)] की लाम्बिकता का प्रयोग करने पर

$$\int_0^x x^{-1} J_{v+2n+1}(x) J_{v+2m+1}(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{if } m \neq n \\ (4n + 2v + 2)^{-1}, & \text{if } m = n, \text{ Rev} > -1. \end{cases}$$

(3.3)

का मान प्राप्त होता है। अब (3.2) में $c_{u_1} \ldots u_r$ Aßk YkkTk [BkTkv U[Wkvbkv\k ›kvOkın (3.1) प्राप्त की जाती है।

टिप्पणी 2. फूरियर-बेसेल श्रेणी (3.1) को [8,p.95, (3.2)] के कई चरों वाले अनुरूप के रूप में देखा जा सकता है,

निर्देश

1. कार्सला, एच० एस० तथा जीगर, जे जे० सी० : Conduction of heat in solids. क्लैरेंडन प्रेस, आक्सफोर्ड, 1986

2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि Tables of integral transforms, भाग 2, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954

3. फाक्स, सी० : Trans. Amer Math. Soc., 1961, 98, 395-429.

4. ल्यूके, वाई० एल० : Integrals of Bessel functions, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1962

5. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के० : Generalized Hypergeometric Functions With Applications in Statistics and Physical Sciences. Lecture Notes Series No. 348. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1978.

6. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के० : The H-function with applications in Statistics and other disciplines. विले ईस्टर्न, नई दिल्ली 1978

7. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी० : The H-functions of one and two variables with applications. साउथ एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली 1982.

8. तक्षक, आर० एल० : Math Education, 1970, IV (3), 93-97.

सर्वीकृत लाप्लास परिवर्त-II

अन्जू माथुर

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (राज०)

[प्राप्त - नवम्बर 20, 1995]

सारांश

सर्वीकृत लाप्लास परिवर्त के चार अभिसरण प्रमेय प्रस्तुत किये गये हैं।

Abstract

On generalized Laplace Transform (II). *By* Anju Mathur, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur (Rajasthan).

Four convergence theorems of generalized Laplace transform have been given.

1. प्रस्तावना

श्रीवास्तव ने[1] एक परिवर्त का सूत्रपात किया है जिसके दक्षिण पक्ष में यदि p से गुणा किया जाय तो उसे निम्नवत् दर्शित किया जाता है—

$$\varepsilon^{\rho,\sigma}_{q,k,m}[f(t);\, p] = p\int_0^\infty (pt)^{\sigma-1/2}\, e^{-(1/2)qpt}\, W_{k,m}(\rho p t) f(t)\, dt \tag{1.1}$$

जहाँ $W_{k,m}(z)$ ह्विटेकर फलन का सूचक है। यदि फलन $f(t)$ प्रत्येक निश्चित अन्तराल $0<t\le R,\ R>0$ में खण्डशःसंतत हो तथा

$$f(t) = \begin{cases} 0\left(e^{\alpha t}\right), & t\to\infty \\ 0\left(t^{\beta}\right), & t\to 0 \end{cases}$$

तो (1.1) विद्यमान होता है यदि $R[(q+\rho)p-2\alpha]>0$ तथा $R(\sigma+\beta+=m+1)>0$

(1.1) निम्न में समानीत हो जाता है—

(i) वर्मा परिवर्त में[2] जब $\sigma=m, q=\rho=1$

(ii) मैनरा परिवर्त में[3] जब $\sigma=-\lambda, q=\rho=1$ तथा $k=k+1/2$

(iii) माइजर परिवर्त में[4] जब $\sigma=-k, q=\rho=1$ तथा $k=k+1/2$

(iv) चिरप्रतिष्ठित लाप्लास परिवर्त में जब $k+m=1/2$, $\sigma=m$, $q=\rho=1$ जो कि तत्समक $z^{-1/2}W_{1/2-m,m}(z)+e^{-1/2z}$ के कारण है।

यहाँ (1.1) के बजाय समाकल परिवर्त

$$\int_0^{\infty}(pt)^{\sigma-16.2}e^{-\frac{1}{2}apt}W_{k,m}(\rho pt)\,d\alpha(t)$$

के लिये कतिपय अभिसरण तथा प्रमेय दिया जा रहा है जहाँ $\alpha(t)$ असली चर t का फलन है अन्तराल $0<t\le R$, में और $0<t\le R$, में प्रत्येक धन R के लिए परिबद्ध विचरण वाला है।

2. अभिसरण प्रमेय

प्रमेय 1 : यदि

$$\underset{0\le u<\infty}{u.b.}\left|\int_0^{u}(p_0t)^{\sigma-1/2}e^{-(1/2)qp_0t}W_{k,m}(\rho p_0t)\,d\alpha(t)\right|=M<\infty \tag{2.1}$$

तो समाकल

$$\int_0^{\infty}(pt)^{\sigma-1/2}e^{-(1/2)qpt}W_{k,m}(\rho pt)\,d\alpha(t) \tag{2.2}$$

अभिसरण करता है $R(1/2\pm m-k)>0$ के लिए तथा प्रत्येक p के लिए जिसमें $p>p_0$ और (2.3) के समान होता है।

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\sigma-1/2}\int_0^{\infty}\psi'(p,t)\,\beta(t)\,dt \tag{2.3}$$

जहाँ

$$\psi(p,t)=\frac{e^{-(1/2)qpt}W_{k,m}(\rho pt)}{e^{-(1/2)qp_0t}W_{k,m}(\rho p_0t)} \tag{2.4}$$

तथा

$$\beta(u) = \int_0^u (p_0 t)^{\sigma - 1/2} e^{-(1/2) q p_0 t} W_{k,m}(\rho p_0 t)\, d\alpha(t) \tag{2.5}$$

उपपत्ति : यदि $\beta(u)$ को (2.5) द्वारा परिभाषित किया जाय तो

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\sigma - 1/2} \int_0^R (pt)^{\sigma - 1/2} e^{-(1/2) q p t} W_{k,m}(\rho p_0 t)\, d\alpha(t)$$

$$= \int_0^R \psi(p,t)\, d\beta(t)$$

$$= \Big[\psi(p,t)\, \beta(t)\Big]_0^R - \int_0^R \psi'(p,t)\, \beta(t)\, dt.$$

अब $[\psi(p,t)\beta(t)]$ (2.5) के बल पर $t = 0$ पर लुप्त हो जाता है।

अपरंच

$$\underset{R \to \infty}{Lt} [\psi(p,R)\beta(R)] = 0$$

जब $p > p_0$ तथा $R(1/2 \pm m - k) > 0$, सम्बन्ध (2.1) तथा $W_{k,m}(x)$के निम्नलिखित उपगामी आचरण के कारण होता है।

$$W_{k,m}(x) = 0\left[x^k e^{-x/2}\right] \text{ दीर्घ } x \text{ के लिये}$$

अब

$$\left|\int_0^R \psi'(p,t)\, \beta(t)\, dt\right| \le M \int_0^R \psi'(p,t)\, dt$$

$$= [\psi(p,t)]_0^R$$

यह स्पष्ट है कि कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत, (2.6) से इस असमिका का दक्षिण पक्ष निश्चित है भले ही R कितना दीर्घ क्यों न हो। इसलिए

$$\int_0^\infty (pt)^{\sigma - 1/2} e^{-(1/2) q p t} W_{k,m}(\rho p t)\, d\alpha(t)$$

$$= \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\sigma - 1/2} \int_0^\infty \psi'(p,t)\beta(t)\, dt$$

उपप्रमेय : यदि समाकल (2.2) $p=p_0$ के लिए अभिसारी हो तो वह समस्त के लिए अभिसारी होता है।

क्योंकि यदि (2.2) $p=p_0$ के लिए अभिसारी है तो (2.1) मान्य है और इस तरह (2.2) समस्त $p>p_0$ के लिए अभिसारी होता है।

प्रमेय 2.

यदि समाकल

$$\int_0^{\infty} (p\,t)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho\,p\,t)\; d\,\alpha(t) \tag{2.7}$$

$\sigma=\sigma_0$ के लिए अभिसारी हो तो

$$\alpha(t) = 0\left[t^{1/2-k-\gamma} \exp\ \{ 1/2(q+\rho)t \} \right] \tag{2.8}$$

प्रत्येक धन p, $R(\sigma_0)\equiv\gamma$ एवं $R(1/2\pm m-k)>0$ के लिए

उपपत्तिः माना कि

$$\beta(t) = \int_0^{t} (p\,t)^{\sigma_0-1/2} e^{-(1/2)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho\,p\,t)\; d\,\alpha(t), 0<t<\infty \tag{2.9}$$

तो

$$\int_0^{t} d\,\alpha\,(t) = \int_0^{t} \frac{d\,\beta\,(t)}{(p\,t)^{\sigma_0-1/2} e^{-(1/2)q\,p\,t} W_{k,m}\,(\rho\,p\,t)}$$

अथवा

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \left[\frac{\beta(t)}{(p\,t)^{\sigma_0-1/2} e^{-(1/2)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho p\,t)} \right]_0^t$$

$$- \int_0^{t} \beta(t)\, \frac{d}{d\,t}\left[(p\,t)^{\sigma_0-1/2} e^{\ (1/2)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho\,p\,t) \right]^{-1} d\,t$$

चूंकि

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{\beta(t)}{(p\,t)^{\sigma_0-1/2} e^{-(1/2)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho p\,t)} \right]$$

(2.9) के बल पर शून्य की ओर प्रवृत्त होता है।

अपरंच, परिकल्पना द्वारा $\beta(\infty)$ विद्यमान है अतः

$$\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lt}}\,[\alpha(t)-\alpha(0)]\,(p\,t)^{\sigma_0-1/2}\,e^{-(1/2)q\,p\,t}\,W_{k,m}(\rho\,p\,t)$$

$$=\beta(\infty)-\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lt}}\,(p\,t)^{\sigma_0-1/2}\,e^{-(1/2)q\,p\,t}\,W_{k,m}(\rho\,p\,t)\int_0^t \beta(t)\,\frac{d}{dt}$$

$$\left[(p\,t)^{\sigma_0-1/2}\,e^{-(1/2)q\,p\,t}\,W_{k,m}(\rho\,p\,t)\right]^{-1}dt$$

$$=\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lt}}\,(p\,t)^{\sigma_0-1/2}\,e^{-(1/2)q\,p\,t}\,W_{k,m}(\rho\,p\,t)\int_0^t[\beta(\infty)-\beta(t)]\,\frac{d}{dt}$$

$$\left[(p\,t)^{\sigma_0-1/2}\,e^{-(1/2)q\,p\,t}\,W_{k,m}(\rho\,p\,t)\right]^{-1}dt$$

ज्यों-ज्यों $t\to\infty$ तो दक्षिण पक्ष लुप्त होता है। अतः

$$\alpha(t)-\alpha(0)=0\left[(p\,t)^{\sigma_0-1/2}\,e^{-(1/2)q\,p\,t}\,W_{k,m}(\rho\,p\,t)\right]^{-1},\ t\to\infty$$

अथवा

$$\alpha(t)=0\left[t^{1/2-k-\gamma}\exp\left\{\frac{1}{2}(q+\rho)\,t\right\}\right]$$

प्रत्येक धन p के लिए।

प्रमेय 3 : यदि

$$\alpha(t)=0\left[t^{1/2-k-\gamma}\exp\left\{\frac{1}{2}(q+\rho)\,t\right\}\right] \tag{2.10}$$

किसी संख्या γ के लिए हो तो समाकल

$$\int_0^\infty (p\,t)^{\sigma-1/2}\,e^{-(1/2)q\,p\,t}\,W_{k,m}(\rho\,p\,t)\,d\alpha(t) \tag{2.11}$$

प्रत्येक धन p, $R(\sigma)>0$ तथा $R(1/2\pm m-k)>0$ के लिए उपपत्ति अभिसारी है। चूँकि $\alpha(t)$ प्रत्येक निश्चित अन्तराल के लिए परिबद्ध विचरण वाला है अतः (2.10) से यह निष्कर्ष निकलता है कि ऐसा अचर M विद्यमान है जिससे

$$|\alpha(t)|\le M\,t^{1/2-k-\gamma}\exp\left[\frac{1}{2}(q+\rho)t\right],$$

जहाँ $0 \le t < \infty$

अतः

$$\int_0^R \frac{d}{dt}\left[(p\,t)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho\,p\,t) \right]\alpha(t)\ dt$$

$$\le M\,(R)^{1/2-\gamma-k} \exp\left[\frac{1}{2}(q+\rho)R \right] \int_0^R \frac{d}{dt}\left[(p\,t)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho\,p\,t) \right] dt$$

$$= M\,R^{\sigma-\gamma} p^{\sigma+k-1/2} \rho^k \ \exp\left[\frac{1}{2}(q+\rho)R\,(1-p) \right] \text{ क्योंकि } R\,(\sigma) > 0$$

इसलिए असमिका के वामपक्ष का समाकल $R\,(\,\sigma\,) > 0\,, R\,(\,1/2 += m-k\,) > 0$ के लिए अभिसारी होता है। अब

$$\int_0^R (p\,t\,)^{\sigma-½} e^{-(½)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho\,p\,t)\ d\,\alpha\,(t)$$

$$= (p\,R\,)^{\sigma-½} e^{-(½)q\,p\,R}\ W_{k,m}(\rho\,p\,R\,)\ \alpha\,(R\,)$$

$$-\int_0^R \frac{d}{dt}\left[(p\,t)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho\,p\,t) \right]\alpha(t)\ dt$$

किन्तु

$$(p\,R\,)^{\sigma-½} e^{-(½)q\,p\,R}\ W_{k,m}(\rho\,p\,R\,)\ \alpha\,(R\,) \to 0 \text{ जब } R \to \infty$$

अतः प्रमेय के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (2.11) अभिसारी है।

प्रमेय 4.

यदि समाकल

$$\int_0^\infty (p\,t\,)^{\sigma-½} e^{-(½)q\,p\,t} W_{k,m}(\rho\,p\,t)\ d\,\alpha\,(t)$$

प्रत्येक धन p, $R(\sigma) > 0$ तथा $R(\,1/2 \pm m-k) > 0$ के लिए अभिसारी हो तो

$$\int_0^\infty (pt)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)qpt} W_{k,m}(\rho pt)\, d\alpha(t)$$

$$= p\rho^{1/2} \int_0^\infty (pt)^{\sigma-1} e^{-(1/2)qpt} W_{k+1/2,\, m-1/2}(\rho pt)\, \alpha(t)\, dt$$

$$-(\sigma-m)p \int_0^\infty (pt)^{\sigma-3/2} e^{-(1/2)qpt} W_{k,m}(\rho pt)\, \alpha(t)\, dt$$

$$-\frac{(1-q/\rho)}{2} p\rho \int_0^\infty (pt)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)qpt} W_{k,m}(\rho pt)\, \alpha(t)\, dt \tag{2.12}$$

उपपत्ति : स्पष्ट है कि

$$\int_0^R (pt)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)qpt} W_{k,m}(\rho pt)\, d\alpha(t)$$

$$= (pR)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)qpR} W_{k,m}(\rho pR)\, \alpha(R)$$

$$-\int_0^R \frac{d}{dt}\left[(pt)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)qpt} W_{k,m}(\rho pt) \right] \alpha(t)\, dt$$

अब

$$(pR)^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)qpR} W_{k,m}(\rho pR)\, \alpha(R) \to 0 \text{ ज्यों-ज्यों } R \to \infty$$

इसलिए

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)\mu x} W_{k,m}(x) \right] = -x^{\sigma-1} e^{-(1/2)\mu x} W_{k+1/2,\, m-1/2}(x)$$

$$+ x^{\sigma-3/2} e^{-(1/2)\mu x} (\sigma-m) W_{k,m}(x)$$

$$+ \left(\frac{1-\mu}{2}\right) x^{\sigma-1/2} e^{-(1/2)\mu x} W_{k,m}(x)$$

का सम्प्रयोग करने पर हमें वांछित परिणाम (2.12) मिल जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० ए० एन० गोयल द्वारा मार्गदर्शन किये जाने के लिए उनका आभारी है।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, एच० एम० : *Mathematica*, 1963, 10(33), 385-390.

2. वर्मा, आर० एस० : *Proc. Nat. Acad. Sci.* (India) 1951, 20A, 209-216.

3. मैनरा, वी० पी० : *Bull. Cal. Math. Soc.*, 1961, 53.

4. माइजर, सी० एस० : *Proc. Nederl. Acad. Wet.*, Amsterdam, 1941, 44, 727-737.

5. रामकुमार : *Journal Indian Mathematical Society*, 1959, 23(3-4), 125-132.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 3, July 1997

मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर के सार्वीकृत गामा बंटन तथा विश्वसनीयता में इसका सम्प्रयोग

पी० एल० सेठी तथा अशोक कुमार व्यास

गणित तथा सांख्यिकी विभाग,
जय नारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त-जनवरी 5, 1997]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर के सर्वीकृत गामा बंटनों की नवीन परिभाषा दी गई है और विश्वसनीयता में इसका सम्प्रयोग किया गया है।

Abstract

A generalized Gamma distribution of matrix argument and its application in reliability. *By* P. L. Sethi and Asok Kumar Vyas, Department of Mathematics & Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Rajasthan).

In the present paper, the authors have given new definition of a generalized gamma distributions of matrix argument and its application in reliability and expressions for the characteristic function, the moment generating function and the r^{th} order moment about origin, mean, variance, M-transform, L-transform have been worked out.

1. प्रस्तावना

इधर के वर्षों में स्टैसी[7] के अनुकरण पर ब्रैडले[3], श्रीवास्तव[6], ली तथा ग्रास[3] ने गामा तथा बीबुल बंटन के अनेक सार्वीकरण प्रस्तावित किये हैं। बोन्डेसन[2] ने सर्वीकृत गामा बंटन के प्रचुर

सम्प्रयोग दिये हैं। कोबायशी[5] ने नवीन प्रकार का सार्वीकृत गामा फलन प्रचारित किया है और हाल ही में अग्रवाल तथा कल्ला[1] ने अदिश चर के लिए परिवर्द्धित सार्वीकृत गामा फलन की स्थापना की है।

हमने मैट्रिक्स स्वतन्त्रचर में कोबायशी सार्वीकृत गामा फलन की विवेचना निम्न रूप में की है—

$$\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha,\beta)=\int_{X>0}|X|^{\alpha-\frac{(m+1)}{2}}|X+T|^{-\lambda_e-trX}\,dX$$

$$\mathrm{Re}(\alpha)>\frac{m-1}{2},\ X=X'>0 \qquad (1.1)$$

हमने अग्रवाल तथा कल्ला[1] के सार्वीकृत गामा बंटन को भी परिवर्तित करके निम्न रूप दिया है—

$$\int_{X>0}|X|^{\alpha-(m+1)/2}|X+T|^{-\lambda_e-tr(BX)}\,dX$$

$$\mathrm{Re}(\alpha)>\frac{m-1}{2},\ X=X'>0.\ \mathrm{Re}(B)>\frac{m-1}{2}$$

$$=|B|^{\lambda-\alpha}\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha,BT) \qquad (1.2)$$

धन पूर्णांक λ के लिए, यदि हम $m=1$ लें तो हारा परिणाम कोबायशी[5] एवं अग्रवाल तथा कल्ला[1] के परिणाम में परिवर्तित हो जाता है।

लाप्लास प्रमेय तथा मेलिन परिवर्तन के लिए संवलन प्रमेय

माना कि f_1 तथा f_2 आदिश फलन हैं $m\times m$ असली संमित धन निश्चित मैट्रिक्सों के। माना कि g_1 तथा g_2 उनके लाप्लास परिवर्त हैं।

माना कि-

$$\int_3(A)=\int_0^A f_1(A-S)f_2(S)\,dS \qquad (1.3)$$

जहाँ समस्त $S>0$ तथा $A-S>0$ पर समाकलन किया जाता है। f_3 का लाप्लास परिवर्त $g_1 g_2$ है।

माना कि $f_{1(U)}$ तथा $f_2(U)$ दो संमित अदिश फलन हैं असली संमित धन निश्चित मैट्रिक्स U के जिसके M-परिवर्त $M_\rho(f_1)=g_1(\rho)$ तथा $M_\rho(f_2)=g_2(\rho)$ ।

माना कि

$$f_3(S) = \int_{U>0} |U|^{\beta} f_1\left(U^{\frac{1}{2}} S U^{\frac{1}{2}}\right) f_2(U)\, dU$$

तो f_3 M-परिवर्त यानी $M_\rho(f_3)$ को निम्नवत् लिखा जाता है

$$M_\rho(f_3) = g_1(\rho)\, g_2\left(\beta - \rho + \frac{m+1}{2}\right) \tag{1.4}$$

जहाँ f_1 तथा f_2 में समाकलों का अन्तः परिवर्तन होता है और जब M-परिवर्त का अस्तित्व होता है।

प्रस्तुत शोधपत्र में लेखकों के कतिपय गुणों वाले मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर में सार्वीकृत गामा बंटन की नवीन परिभाषा स्थापित की है। कतिपय नवीन विशिष्ट दशाओं की व्याख्या भी की गई है।

2. मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर (Argument) का सार्वीकृत गामा बंटन

इस अनुभाग में कतिपय ज्ञात निर्दिष्ट दशाओं वाले मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर के सार्वीकृत गामा बंटन की नवीन प्रकार की परिभाषा दी गई है।

इस मैट्रिक्स स्वतन्त्रचर के सार्वीकृत गामा बंटन के किंचित परिवर्द्धित रूप पर विचार करेंगे जो इस प्रकार है—

$$\int_{X>0} |X|^{\alpha - \frac{(m+1)}{2}} |X+T|^{-\lambda} e^{-trBX}\, dX$$

$$\text{Re}(\alpha) > \frac{m-1}{2}, \text{Re}(B) > 0$$

$$= |B|^{\lambda - \alpha} \Gamma_{m(\alpha)}(\alpha, BT) \tag{2.1}$$

समीकरण (1.3) तथा (1.4) से प्राप्त परिणाम की सहायता से X-समाकल का मान निकालने पर

$$\int_{0<X<I} |X|^{\alpha - \frac{(m+1)}{2}} |I+X|^{-\lambda} e^{-trBX}\, DX$$

$$= \Gamma_m(\alpha)\, {}_2F_0(\lambda, \alpha, -B^{-1}) |B|^{-\alpha} \tag{2.2}$$

क्योंकि $\text{Re}(B) > 0, \text{Re}(\alpha) > \frac{m-1}{2}$

यह रोचक बात है कि मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर के सार्वीकृत गामा फलन को ${}_2F_0[\,]$ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है-

$$\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT) = \Gamma_m(\alpha) |BT|^{-\alpha}\, {}_2F_0[\alpha, \beta; -(BT)^{-1}]. \tag{2.3}$$

परिभाषा

यादृच्छिक मैट्रिक्स विचर $X = X' > 0$ नवीन प्रकार के चार प्राचलों सहित सार्वीकृत गामा बंटन का अनुगमन करता है यदि इसके प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f) को निम्नवत् प्रदर्शित किया जाय—

$$f(X = x : \alpha, T, B, \alpha) = \frac{|B|^{\alpha-\lambda} |X|^{\alpha-(m+1)/2} |X+T|^{-\lambda} e^{-trBX}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \tag{2.4}$$

जहाँ

$$\mathrm{Re}(\alpha) > \frac{m-1}{2}, \mathrm{Re}(B) > 0, X = X' > 0, T = T' > 0$$

देखा जाता है कि मैट्रिक के बारे में $\lambda = 0$, तब

$$\Gamma_{m(0)}(\alpha) = \frac{\Gamma_m(\alpha)}{|B|^{\alpha}} \tag{2.5}$$

तथा

$$f(X) = \frac{|B|^{\alpha}}{\Gamma_m(\alpha)} |X|^{\alpha-(m+1)/2} e^{-trBX} \tag{2.6}$$

जो कि मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर (आर्गुमेंट) के साधारण गामा बंटन का प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.) है।

3. मैट्रिक्स स्वतन्त्रचर के सांख्यिकीय गुण तथा कतिपय समाकल परिवर्त बंटन

इस अनुभाग में मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर के सांख्यिकीय गुणों -यथा माध्य प्रसरण, आघूर्ण जनक फलन, अभिलक्षण-फलन, उच्चतर कोटिक आपूर्ण की व्याख्या की गई है। मैट्रक्स स्वतन्त्रचर के मे लिन तथा लाप्लास परिवर्तों की भी व्याख्या हुई है।

प्रमेय 1 : यदि यादृच्छिक मैट्रिक्स विचर $x = x' > 0$ सार्वीकृत गामा बंटन का अनुगमन करे जिसके मैट्रिक्स प्राचल λ, α, T, B हों तो इसके माध्य तथा प्रसरण क्रमशः इस प्रकार होंगे—

$$\text{माध्य} = \frac{|B|^{-1} \Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+1, BT)}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \tag{3.1}$$

$$= \frac{\alpha-\lambda}{b} \text{ लघु } bt \text{ तथा } m = 1 \text{ के लिए} \tag{3.2}$$

तथा

जब समीकरण (2.4) में $B = I$ तो मैट्रिक्स स्वतन्त्र चर के सर्वीकृत गामा बंटन सांख्यिकीय गुण

माध्य (Mean)	प्रसरण (Variance)
$\frac{\Gamma m(\lambda)(\alpha+1,\Gamma)}{\Gamma mi(\lambda)(\alpha,\Gamma)}$ $= (\alpha-\lambda)$ लघु t t तथा $m = 1$ के लिए	$\Gamma m(\lambda)[\alpha+2,T]\Gamma m(\lambda)[\alpha,T]$ $-\left[\frac{\Gamma m(\lambda)[\alpha+1,T]}{\Gamma m(\lambda)[\alpha,T]}\right]^2$ $= (\alpha-\lambda)$ लघु t t तथा $m = 1$ के लिए
$\mu r'$	M.G.F.
$\frac{\Gamma m(\lambda)(\alpha+r,T)}{\Gamma m(\lambda)(\alpha i\,.T)}$ जब m=1 $\frac{\Gamma\lambda(\alpha+r,t)}{\Gamma\lambda(\alpha,t)}$	$\frac{\lvert I-S\rvert^{\lambda-\alpha}\Gamma m(\lambda)[\alpha,T(1-S)]}{\Gamma m(\lambda)(\alpha,T)}$ जब m=1 $(1-S)^{\lambda-\alpha}\Gamma\lambda[\alpha,t(1-S)]$
$\Phi_\alpha(T)$	L[f(X)]
$\frac{\lvert I-\tau S\rvert^{\lambda-\alpha}\Gamma m(\lambda)[\alpha,T(1-\tau S)]}{\Gamma m(\lambda)(\alpha,T)}$ जब m=1 $(1-\tau S)^{\lambda-\alpha}\Gamma\lambda[\alpha,t(1-\tau S)]$	$\lvert I+S\rvert^{\lambda-\alpha}\frac{\Gamma m(\lambda)[\alpha_1 T(1+ST)]}{\Gamma m(\lambda)[\alpha,T]}$ जब m=1 $(1+S)^{\lambda-\alpha}\Gamma\lambda[\alpha,t(1+S)]$

M[f(X)]

$$\frac{\Gamma(\lambda)\left[\alpha+S-\frac{m+1}{2},T\right]}{\Gamma m(\lambda)[\alpha,T]}$$

जब m=1

$$\frac{\Gamma\lambda(\alpha+S-1,t)}{\Gamma\lambda i(\alpha,t)}$$

$$\text{प्रसरण} = \frac{|B|^{-2}\left[\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+2, BT)\,\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT) - (\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+1, BT))^2\right]}{\left[\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT]\right]^2} \tag{3.3}$$

$$= \frac{\alpha-\lambda}{b^2} \text{ लघु } bt \text{ के लिए तथा } m = 1 \tag{3.4}$$

उपपत्ति :- परिभाषा के अनुसार

$$\text{माध्य} = E(|X|) = \int_{x>0} |X| f(X)\, dX$$

$$= \frac{|B|^{\alpha-\lambda}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \int_{x>0} |X|^{\alpha+1-\frac{(m+1)}{2}} |X+T|^{-\lambda} e^{-trBX} dX$$

$$= \frac{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+1, BT)}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} |B|^{-1} \tag{3.5}$$

m = 1 रखने पर हमें अदिश स्केल (अग्रवाल तथा कल्ला का परिणाम[1]) प्राप्त होता है।

$$= \frac{B^{-1}\Gamma_\lambda(\alpha+1, bt)}{\Gamma_\lambda(\alpha, bt)}$$

$$= \frac{(\alpha n)\, U(\alpha+1, 2+\alpha-\lambda, bt)}{U(\alpha, 1+\alpha-\lambda, Bt)}$$

$$= \frac{\alpha-\lambda}{b} \text{ लघु के लिए} \tag{3.6}$$

$$\text{प्रसरण} = E(|X|^2) - [E(|X|)]^2$$

$$E(|X|^2) = \int_{x>0} |X|^2 f(X)\, dX$$

$$= \frac{|B|^{\alpha-\lambda}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+2, BT)} |B|^{-2} \tag{3.7}$$

m = 1 रखने पर

$$= \frac{b^{-2}\Gamma_\lambda(\alpha+2, bt)}{\Gamma_\lambda(\alpha, bt)}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)n^2 U(\alpha+2, 3+\alpha-\lambda, bt)}{U(\alpha, 1+\alpha-\lambda, bt)}$$

$$= \frac{(1+\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda)}{b^3} \text{ लघु } bt \text{ के लिए} \tag{3.8}$$

प्रसरण $= E(|X|^2)-[E(|X|)]^2$

$$= \frac{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+2, BT)}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} |B|^{-2} \frac{[\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)]^2}{[\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)]^2} |B|^{-2}$$

$$= |B|^{-2} \left[\frac{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+2, BT)\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)-[\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+1, BT)]^2}{[\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)]^2}\right] \tag{3.9}$$

m = 1 रखने पर

$$= b^{-2} \frac{[\Gamma_{\lambda}(\alpha+2, bt)\Gamma_{\lambda}(\alpha, bt)-\{\Gamma_{\lambda}(\alpha+1, bn\}^2]}{[\Gamma_{\lambda}(\alpha, bt)]^2}.$$

$$\text{प्रसरण} = \frac{\alpha-\lambda}{b^2} \text{ लघु } bt \text{ के लिए} \tag{3.10}$$

प्रमेय 2. सार्वीकृत गामा बंटन का अनुगमन करने पर मूल बिन्दु के चारों ओर का rth आघूर्ण तथा मैट्रिक्स यादृच्छिक चर $X-X'>0$, का आघूर्ण जनक फलन (M.G.F.) हैं—

$$\mu'_r = \frac{|B^{-r}\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha+r, BT)}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \tag{3.11}$$

तथा

$$\text{M.G.F.} = \left[\,\left|I-SB^{-1}\right|\,\right]^{\lambda-\alpha} \frac{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT(I-SB^{-1})]}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \tag{3.12}$$

उपपत्तिः आघूर्ण की परिभाषा से

$$E[|X|^r] = \int_{x>0} |X|^r f(X)\, dX$$

$$= \frac{|B|^{\alpha-\lambda}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \int_{x>0} |X|^{\alpha+r-(m-1)/2}\, |X+T|^{-\lambda_c - trBX}\, dX$$

$$= \frac{|B|^{-r}\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha+r, BT]}{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT]} \qquad (3.13)$$

m = 1 रखने पर

$$\mu'_r = \frac{b^{-r}\Gamma_\lambda(\alpha+r, bt)}{\Gamma_\lambda(\alpha, bt)} \qquad (3.14)$$

आघूर्ण जनक फलनों की परिभाषा से

$$E[e^{trSX}] = \int_{X>0} e^{trSX} f(X)\, dX$$

$$= \frac{|B|^{\alpha-\lambda}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \int_{X>0} |X|^{\alpha\frac{(m+1)}{2}} |X+T|^{-\lambda_3 - trBX}\left(I - SB^{-1}\right) dX$$

(3.15)

m = 1 रखें तो

$$= \left[(1-Sb^{-1})\right]^{-\lambda-\alpha} \frac{\Gamma_\lambda\left[\alpha, bt(1-Sb^{-1}\right]}{\Gamma_\lambda[\alpha, bt]} \qquad (3.16)$$

प्रमेय 3. यदि यादृच्छिक मैट्रिक्स विचर $X = X' > 0$ सर्वीकृत गामा बंटन का अनुगमन करे तो इसका अभिलक्षणिक फलन होगा-

$$\Phi_X(T) = \left[\,\left|I - \tau S B^{-1}\right|\,\right]^{\lambda-1} \frac{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha,\ BT(I - \tau SB^{-1})]}{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha,\ BT]}$$

उपपत्ति-अभिलक्षण-फलन की परिभाषा से

$$\Phi_X(S) = [\exp\{\tau tr(XS)\}]$$

$$= \int_{x>0} \exp[\tau tr(XS)] f(X)\, dX$$

जहाँ $\tau = (-1)^{1/2}$, S एक $m \times m$ अभिलक्षण फलन चरों का संमित मैट्रिक्स है और E गणितीय प्रत्याशा को प्रदर्शित करता है।

$$\Phi_X(S) = \frac{|B|^{\alpha-\lambda}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \int_{x>)} |X|^{\alpha - \frac{(m+1)}{2}} |X+T|^{-\lambda} e^{-trBX(I-\tau SB^{-1})} dX$$

$$= \left[\left| I - \tau S B^{-1} \right| \right]^{\lambda-\alpha} \frac{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT(I-\tau, SB^{-1})]}{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT]} \quad (3.17)$$

m = 1 रखें तो

$$= \left[\left(1 - \tau S b^{-1} \right) \right]^{\lambda-\alpha} \frac{\Gamma_\lambda[\alpha, bt(1-\tau SB^{-1})]}{\Gamma_\lambda[\alpha_1 \ bt]}$$

विशिष्ट दशाएँ

(i) जहाँ $\lambda = 0$ हो तो p.d.f. समानीत होता है

$$f(X) = \frac{|B|^{\alpha} |X|^{\alpha-m-1)/2} e^{-trBX}}{\Gamma_m(\alpha)}$$

में जहाँ $\text{Re}(\alpha) = > \frac{m-1}{2}, \text{Re}(B) > 0, X > 0$

$= 0,$ अन्यत्र (4.1)

(ii) $\alpha = \frac{m+1}{2} \lambda = 0,$ लेने पर p. d. f. निम्नलिखित रूप ग्रहण करता है–

$$f(X) = \frac{e^{-trBX}}{\Gamma_m\left[\frac{m+1}{2}\right] |B|^{-\frac{(m+1)}{2}}}$$

जहाँ $RE(B) > 0, X > 0$

$= 0,$ अन्यत्र (4.2)

p.d.f. का यह रूप चरघातांकी बंटन प्रदान करता है।

(iii) $\alpha = \frac{n}{2}, B = \frac{1}{2}S^{-1}$ एवं $\lambda = 0$ \kvl'kv U[

p.d.f. से विशर्ट बंटन प्राप्त होता है जिसका स्केल मैट्रिक्स S होता है और स्वातन्त्र्य कोटि n होती है।

$$f(X) = \frac{2^{-n/2} |X|^{n-m-1)/2} etr\left(.-\frac{1}{2}S^{1}X\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)|S|^{n/2}}$$

$X = X' > 0,\ T = T' > 0,\ m \leq n$ के लिए

$= 0,$ अन्यत्र (4.3)

(iv) यदि B को शून्य मैट्रिक्स होने दिया जाय तो (2.1) निम्नलिखित स्वरूप ग्रहण करता है-

$$\int_{x>0} |X|^{\alpha - \frac{(m+1)}{2}} |X + T|^{-\lambda}\, dX = \Gamma_{m(\lambda)}(\alpha),$$

जहाँ

$$\text{Re}(\alpha) > \frac{m-1}{2},\ X = X' > 0,\ T = T' > 0 \tag{4.4}$$

p.d.f. निम्न रूप ग्रहण करता है—

$$f(X) = \frac{|X|^{\alpha - \frac{(m+1)}{2}} |X+T|^{-\lambda}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha)}$$

जहाँ

$$\text{Re}(\alpha) > \frac{m-1}{2},\ X = X' > 0,\ T = T' > 0$$

$= 0$ अन्यत्र (4.5)

(v) जब m=1 तो (p.d.f) अग्रवाल तथा कल्ला[1] द्वारा प्रदत्त प्रायिकता बंटन में समानीत हो जाता है।

(vi) जब $m=1, \lambda=0$ Pkv (p.d.f.) सामान्य गामा फलन में समानीत हो जाता है।

(vii) जब B = I तो (2.1) निम्नवत् समानीत होता है—

$$\int_{X>0} |X|^{\alpha - \frac{(m+1)}{2}} |X + T|^{-\lambda} e^{-trBX}\, dX$$

$$\text{Re}(\alpha) > \frac{m-1}{2},\ X = X' > 0,\ T = T' > 0$$

$$= \Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, T) \tag{4.6}$$

p.d.f. निम्नवत् हो जाता है

$$f(X) = \frac{|X|^{\alpha - \frac{(m+1)}{2}} |X + T|^{-\lambda} e^{-trx}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, T)}$$

जहाँ

$$Re(\alpha) > \frac{m-1}{2}, X = X' > 0, T = T' > 0$$

$$= 0, \text{ अन्यत्र} \tag{4.7}$$

जब m=1 तो (4.6) कोबयशी के सार्वीकृत फलन को निम्नवत् समानीत कर देता है—

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}(x+t)^{-\lambda} e^{-\lambda} dx = \Gamma_{\lambda}(\alpha, t) \tag{4.8}$$

धन पूर्णांक λ के लिए । यहाँ α तथा t फलन के प्राचल हैं।

प्रमेय 4. यदि यादृच्छिक मैट्रिक्स विचर $X = X' > 0$ सार्वीकृत गामा बंटन का अनुगमन करे तो इसके क्रमशः लैप्लास परिवर्त तथा मेलिन परिवर्त होंगे—

$$L[f(X)] = \left[\,\left|I + XB^{-1}\right|\,\right]^{\lambda-\alpha} \frac{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT(I + SB^{-1})]}{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT]}$$

तथा

$$M[f(X)] = |B|^{-s+\frac{m+1}{2}} \frac{\Gamma_{m(\lambda)}\left[\alpha + \delta - \frac{m+1}{2}, BT\right]}{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT]}.$$

उपपत्तिः लाप्लास परिवर्त की परिभाषा से

$$L[f(X)] = \int_{X>0} etr(-SX) f(X)\, dX$$

$$= \frac{|B|^{\alpha-\lambda}}{\Gamma_{m(\lambda)}(\alpha, BT)} \int_{X>0} |X|^{\alpha - \frac{(m+1)}{2}} |X + T|^{-\lambda} e^{trBX(1+SB^{-1})}\, dX$$

$$= \left[\,\left|I + SB^{-1}\right|\,\right]^{\lambda-\alpha} \frac{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT(I + SB^{-1})]}{\Gamma_{m(\lambda)}[\alpha, BT]} \tag{4.15}$$

$m = l$ रखें तो

$$= \left[\left(I + S B^{-1} \right) \right]^{\lambda - \alpha} \frac{\Gamma_\lambda [\alpha, \, b t (I + S b^{-1})]}{\Gamma_\lambda [\alpha, \, b t]} \tag{4.16}$$

मेलिन परिवर्त की परिभाषा से

$$M[f(X)] = \int_{X>0} |B|^{s - \frac{(m+1)}{2}} f(X) \, dX$$

$$= \frac{|B|^{\alpha - \lambda}}{\Gamma_{m(\lambda)} (\alpha, \, B T)} \int_{X>0} |X|^{\alpha + s - \frac{(m+1)}{2} - \frac{(m+1)}{2}} |X + T|^{-\lambda} e^{-tr B X} \, dX$$

$$= \frac{|B|^{-s + \frac{m+1}{2}} \Gamma_{m(\lambda)} \left[\alpha + S - \frac{m+1}{2}, \, B T \right]}{\Gamma_{m(\lambda)} [\alpha, \, B T]} \tag{4.17}$$

$m = 1$ रखें तो

$$M[f(X)] = \frac{b^{-s+1} \Gamma_\lambda (\alpha + S - 1, \, b T)}{\Gamma_\lambda (\alpha, \, b t)}.$$

निर्देश

1. अग्रवाल, एस० के० तथा कल्ला, एस० एल०, : Commun. Statist. Theory and Meth., 1996, 25 (1), 201-210.
2. बोंडेसन : Generalized Gamma Convolutions and Densities, Lecture note in Statistics. Springer-Verlag. New York, 1992
3. ब्रैडेले, एम०, : Commun. in Statist. Theory and Method, 1988, 17, 501-517;
4. ली, एम० तथा ग्रास, ए०, : J.Static. Plann. and Inference., 1991, 29, 137-143.
5. कोबयशी, के०, : J. Physical Society of Japan. 1991, 60(5), 1501-1512.
६. श्रीवास्तव, जे०, : Commun. in Statist. Theory and Method, 1988, 18, 1031-1045;
7. स्टैसी, ई० डब्लू०, : Annals of Mathematical statistics, 1962, 33, 1187-1192.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 3, July 1997.

सार्वीकृत आंशिक समाकल तथा समाकल परिवर्त

मनोज कुमार अग्रवाल

गणित विभाग, एस० एस० एल० जैन स्नातकोत्तर महाविद्यालय, विदिशा (म०प्र०)

[प्राप्त-सितम्बर 10, 1994]

सारांश

सर्वप्रथम एक तथा दो चरों के I-फलन के सार्वीकृत आंशिक समाकल प्राप्त करके चार प्रमेय प्राप्त किये गये हैं जिनसे एक तथा दो चरों वाले कतिपय सार्वीकृत समाकल परिवर्तों के मध्य के सम्बन्ध प्रकट होते हैं।

Abstract

On generalised fractionl integration and integral transforms. *By* Manoj Kumar Agrawal, Dpartment of Mathematics, S. S. L. Jain P. G. College, Vidisha (M.P.).

In the present paper, we first obtain the generalised fractional integrals of the I-function of one and two variables as Mellin-Barnes contour integral. Next we obtain four theorems showing relations between certain generalized integral transforms of one and two variables.

1. प्रस्तावना तथा संकेतन

यहाँ पर हम दो चरों वाले निम्नलिखित सर्वीकृत आंशिक समाकल आपरेटरों का अध्ययन करेंगे।

$$R\left[\begin{matrix}(\alpha^{y}) & (\gamma^{y}) & (b^{y}) \\ (\beta^{y}) & (k^{y}) & (\eta^{y})\end{matrix}; f(z_1, z_2)\right] = \prod_{y=1}^{2}\left\{\frac{\mu^{y} z_{y}(-\eta^{y}-1)}{\Gamma(z-\alpha^{y})}\right\}$$

$$\times \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \prod_{y=1}^{2} \left\{ t_y^{\eta^y} \, {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha^y, \beta^y + k^y \\ \gamma^y \end{matrix} ; \frac{t_y^{\mu^y}}{z_y^{\mu^y}} \right) \right\} f\left(t_1, t_2\right) dt_1, dt_2 \qquad (1.1)$$

एवं

$$K\left[\begin{matrix} \left(\alpha^y\right), \left(\gamma^y\right), \left(b^y\right) \\ \left(\beta^y\right), \left(k^y\right), \left(\delta^y\right) \end{matrix} ; f\left(z_1, z_2\right) \right] = \prod_{y=1}^{2} \left[\mu^y z_y \delta^y \right]$$

$$\times \int_{z_1}^{\infty} \int_{z_2}^{\infty} \prod_{y=1}^{2} \left[t_y^{-\delta^y-1} \, {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha^y, \beta^y + k^y \\ \gamma^y \end{matrix} ; \frac{z_y^{\mu^y}}{t_y^{\mu^y}} \right) \right] f\left(t_1, t_2\right) dt_1, dt_2 \qquad (1.2)$$

आपरेटरों का अस्तित्व है बशर्ते कि $y = 1, 2$ के लिए

(i) $k^y = 0, 1, \ldots$ तथा $\mu^y > 0$

(ii) $\gamma^y \neq 0, -1, -2, \ldots, Re(1 - \alpha^y) > 0, \; Re(1 + \gamma^y - \alpha^y - \beta^y - x^y) > 0,$

(iii) $Re(\eta^y + l^y + 1) > 0$

(iv) $Re(b^y) > 0$ अथवा $Re(b^y) = 0$ तथा $Re(\delta^y - l'^y) > 0$

जहाँ पर हम मान लेते हैं कि

$$f\left(t_1, t_2\right) = 0\left(t_1^{l^1}, t_2^{l2}\right), \; \max\left(t_1, t_2\right) \to 0$$

$$= 0\left(e^{-b^1 t_1 - b^2 t_2} : t_2^{l'^1}, t_2^{l'^2}\right), \; \min\left(t_1, t_2\right) \to 0$$

यहाँ पर हमें एक चर के I-फलन वाले निम्नलिखित सार्वीकृत आंशिक समाकल आपरेटरों की भी आवश्यकता पड़ेगी[1].

$$R_{\mu,\sigma}^{\eta,\alpha,\lambda}[f(t); x] = \mu x^{(-\eta-\mu\alpha-1)} \int_0^x t^{\mu}\left(x^{\mu} - x^{\mu}\right)\alpha$$

$$\times I_{P_i, Q_i : r'}^{M,N}\left[kU \left| \begin{matrix} [(a'_j, \alpha'_j)_{1,N}], [(a'_{ji}, \alpha'_{ji})_{N+1, P_i}] \\ [(b'_j, \beta'_j)_{1,M}], [(b'_{ji}, \beta'_{ji})_{m+1, Q_i}] \end{matrix} \right. \right] f(t)\, dt \qquad (1.3)$$

तथा

$$K_{\mu,\sigma}^{\eta,\alpha,\lambda}[f(t);\,x] = \mu x^{\delta}\int_0^x t^{(-\delta-\mu\alpha-1)}\left(x^{\mu}-x^{\mu}\right)\alpha$$

$$\times\, I_{P_i,Q_i:r'}^{M,N}\left[kV\left|\begin{matrix}[(a'_j,\alpha'_j)_{1,N}],[(a'_{ji},\alpha'_{ji})_{N+1,P_i}]\\ [(b'_j,\beta'_j)_{1,M}],[(b'_{ji},\beta'_{ji})_{m+1,Q_i}]\end{matrix}\right.\right]f(t)\,dt \qquad (1.4)$$

जहाँ

$$U = \left(\frac{t^{\mu}}{x^{\mu}}\right)^{\lambda}\left(1-\frac{t^{\mu}}{x^{\mu}}\right)^{\sigma} \qquad (1.5)$$

$$V = \left(\frac{x^{\mu}}{t^{\mu}}\right)^{\lambda}\left(1-\frac{x^{\mu}}{t^{\mu}}\right)^{\sigma} \qquad (1.6)$$

तथा μ,λ,σ धनात्मक हैं बशर्ते कि सन्निहित समाकलों का अस्तित्व हो, f(t) के I-फलन परिवर्त को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है-

$$\mathcal{J}(s) = \int_0^{\infty} I_{p_i,q_i:r}^{m,n}\left[(st)^{v}\left|\begin{matrix}[a_j,\alpha_j)_{1,N}],[(a_{ji},\alpha_{ji})_{n+1,p_i}]\\ [b_j,\beta_j)_{1,m}],[(b_{ji},\beta_{ji})_{m+1,q_i}]\end{matrix}\right.\right]f(t)\,dt.\, v>0 \qquad (1.7)$$

बशर्ते कि समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी हो। हम यहाँ पर निम्नलिखित दो विमीय समाकल परिवर्त का भी अध्ययन करेंगे जिसमें दो चरों का I-फलन सन्निहित है।

$$\mathcal{J}\left(s_1,\,s_2\right) = s_1\; s_2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} I_1\left[\begin{matrix}\left(s_1,\;t_1\right)^{h_1}\\ \left(s_2,\;t_2\right)^{h_2}\end{matrix}\right] \qquad (1.8)$$

बशर्ते कि (1.8) में बहुगुण समाकल का अस्तित्व हो, जहाँ पर

$$I\left[z_1,\,z_2\right] = I_{p_{i_1},q_{i_1}:r_1:p_{i_2},q_{i_2}:r_2;p_{i_3},q_{i_3}:r_3}^{0,n_1:m_2,n_2:m_3,n_3}\left[\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\left|\begin{matrix}[(a_j;\alpha_j,A_j)_{1,n_1}],\\ [(b_{ji_1},\beta_{ji},B_{ji_1})_{1,q_{i_1}}],\end{matrix}\right.\right.$$

$$[(a_{ji_1},\alpha_{ji_1},A_{ji_1})_{n_1+1,p_{i_1}}],[(c_j,\gamma_j)_{1,n_2}],[(c_{ji_2},\gamma_{ji_2})_{n_2+1,p_{i_2}}],$$

$$[(d_j,\delta_j)_{1,m_2}],[(d_{ji_2},\delta_{ji_2})_{m_2+1,q_{i_2}}],[(f_j,F_j)_{1,m_3}],$$

$$\left.\begin{matrix}[(e_j, E_j)_{1,n_3}], [(e_{ji_3}, E_{ji_3})_{n_3+1,p_{i_3}}] \\ \\ [(f_{ji_3}, F_{ji_3})_{m_3+1,q_{i_3}}]\end{matrix}\right] \tag{1.9}$$

तथा $I_1[z_1, z_2]$ इसकी विशिष्ट दशा $n_1 = 0$ है दो चरों वाले I-फलन शर्मा तथा मिश्रा[6] द्वारा परिभाषित है और अन्य समस्त प्रतिबन्ध पहले ही शर्मा तथा मिश्रा[6] एवं अग्रवाल[2,3] द्वारा दिये जा चुके हैं।

हम I-फलन में तीन डाट ... यह सूचित करने के लिए प्रयुक्त करेंगे कि उस स्थिति में I-फलन है, प्राचल वही हैं जो (1.7) तथा (1.9) जैसे ही हैं।

2. भिन्नात्मक समाकल

$v, \lambda, \mu, \sigma > 0$ के लिए हमें ज्ञात है

$$1. \quad R^{\eta,\alpha,\lambda}_{\mu,\sigma}\left\{ I^{m,n}_{p_i,q_i:r}\left[(zt)^v \middle| \begin{matrix}\ldots,\ldots \\ \ldots,\ldots\end{matrix}\right]; x\right\} = \left\{\sum_{h=1}^{M}\sum_{h'=1}^{\infty}\frac{(-1)^{h'}(k')\,e^{h'}}{h'!\,\delta_h}\right.$$

$$\times\, g\left(e^{h'}\right)\Gamma\left(\alpha+\sigma e^{h'}+1\right) I^{m,n+1}_{psibi+1,q_i+1:r}$$

$$\left.\times\left[(zx)^v \middle| \begin{matrix}(1-(\eta/\mu)-(1/\mu)-\lambda e^{h'}; \ldots; \ldots \\ \ldots, \ldots; [-:\eta/\mu)-(1/\mu)-\alpha-(\lambda+\mu)\,e^{h'}, v/\mu]\end{matrix}\right]\right\} \tag{2.1}$$

जहाँ

$$g\left(e^{h'}\right) = \frac{\prod\limits_{j=1\, j\neq h}^{M}\Gamma\left(b'_j-\beta'_j e^{h'}\right)\prod\limits_{j=1}^{N}\Gamma\left(1-a'_j+\alpha'_j e^{h'}\right)}{\prod\limits_{j=M+1}^{Q_i}\Gamma\left(1-b'_{ji}+\beta'_{ji}e^{h'}\right)\prod\limits_{j=N+1}^{P_i}\Gamma\left(a'_{ji}-\alpha'_{ji}e^{h'}\right)} \tag{2.2}$$

तथा

$$e^{h'} = \left(b'_h + h'\right)/\beta_h \tag{2.3}$$

साथ-साथ min Re $[\eta + v\, b_{ji}/\beta_{ji} + \mu\lambda b'_{ji}/\beta'_{ji} + \mu\lambda b'_{ji} + 1] > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, M$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $i = 1, 2, \ldots, r'$, min Re $[\alpha + \sigma(h'_{ji}/\beta'_{ji}) + 1] > 0$, $i = 1, 2, \ldots, r'$, $j = 1, 2, \ldots, M$.

बशर्ते कि (2.1) में श्रेणी पूर्णतया अभिसारी हो ।

$$\textbf{2.}\quad K^{\delta,\alpha,\lambda}_{\mu,\sigma}\left\{ I^{m,n}_{p_i,q_i:r}\left[(zt)^{\nu} \left| \begin{matrix} \ldots,\ldots \\ \\ \ldots,\ldots \end{matrix} \right. \right]; x \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{M} \sum_{h'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h'} (k') e^{h'}}{h'!\,\delta_h}\; g\left(e^{h'}\right) \Gamma\left(\alpha + 1 + \sigma e^{h'}\right)$$

$$\times I^{m+1,n}_{p_i+1,q_i+1:r}\left[(zx)^{\nu} \left| \begin{matrix} \ldots,\ldots; (\alpha + (\delta/\mu) + (\sigma +) \,.\, e^{h'} + 1, \nu/\mu] \\ \\ [(\delta/\mu) + \lambda e^{h'}, \nu/\mu)], \ldots, \ldots \end{matrix} \right. \right] \tag{2.4}$$

[$g(e^{h'})$ एवं $e^{h'}$ (2.2) तथा (2.3) द्वारा दिये जा रहे हैं ।

साथ-साथ Re $[\delta - (\nu(a_{ji}-1)/\alpha_{ji}) + \mu\lambda(b'_{ji}/\beta'_{ji}/\beta'_{ji})] > 0,\ i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, n;$
$i = 1, 2, \ldots, r';\ j = 1, 2, \ldots M;$ Min Re $[\alpha + \sigma(b'_{ji}/\beta'_{ji}) + 1] > 0,$
$j = 1, 2, \ldots, M;\ i = 1, 2, \ldots r'$

बशर्ते कि (2.4) में श्रेणी पूर्णतया अभिसारी हो।

$$\textbf{3.}\quad R^{\delta,\alpha,\lambda}_{\mu,\sigma}\left\{ I\left[\begin{matrix} (z_1 t)^{\nu_1} \\ \\ (z_2 t)^{\nu_2} \end{matrix} \right]; x \right\} = I^{0,n_1+1;\ldots;\ldots;M,N+1}_{p_{i_1}+1,q_{i_1}+1:r_1;\ldots;\ldots;p_i+1,Q_i:r'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (z_1 x)^{\nu_1} \\ \\ (z_2 xt)^{\nu_2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} P_1 : \ldots; \ldots; (-\alpha, \sigma), [(a'_j, \alpha'_j)_{1,N}], [(a_{ji}, \alpha_{ji})_{N+1,p_i}] \\ \\ Q_1 : \ldots; \ldots; [(b'_j, \beta'_j)_{1,M}], [(b'_{ji}, \beta'_{ji})_{M+1,Q_i}] \end{matrix} \right. \right] \tag{2.5}$$

जहाँ $P_1 : [1 - (\eta/\mu) - (1/\mu); \nu_1/\mu, \nu_2/\mu], [(a_j; \alpha_j, A_j, 0)_{1,n_1}], [(a_{ji_1}, \alpha_{ji_1}, A_{ji_1}, 0)_{n_1+1, P_{i_1}}].$

$Q_1 : [-(\eta/\mu) - (1/\mu) - \alpha; \nu_1/\mu, \nu_2/u, (\lambda + \sigma)], [(b_{ji_1}, \beta_{ji_1}, 0)_{1, q_{i_1}}]$

बशर्ते $v_y > 0$, $\min Re\left[\eta + \mu\left(b'_{ji}/\beta'_{ji}\right) + \left(v_1 d_{ji_2}/\delta_{ji_2}\right)\right] > 0$. $j = 1, 2, \dots M$;

$i = 1, 2, \dots, r'$; $j = 1, 2, \dots, m_2$; $i_2, 2, \dots, r_2$; $\min Re\left[(\eta + \mu\left(b'_{ji}/b\eta_{ji}\right) + \left(v_2 f_{ji_3}/F_{ji_3}\right)\right] > 0$,

$j = 1, 2, \dots, m.$, $i = 1, 2, \dots, r'.$, $j + 1, 2, \dots, m_3.$, $i_3 = 1, 2, \dots, r_3.$;

$\min Re\left[\alpha + \sigma\left(b'_{ji}/\beta'_{ji}\right) + 1\right] > 0, j = 1, 2, \dots M'., i = 1, 2, \dots, r'.$

4. $$K^{\delta, \alpha, \lambda}_{\mu, \sigma}\left\{ I\left[\begin{matrix}(z_1/t)^{v_1}\\ \\ (z_2/t)^{v_2}\end{matrix}; x\right]\right\} = I^{0, n_1+1; \dots; \dots; M, N+1}_{p_{i_1}+1, q_{i_1}+1: r_1: \dots; \dots; p_i+1, Q_i: r}$$

$$\times\left[\begin{matrix}(z_1/x)^{v_1}\\ \\ (z_2/x)^{v_2}\end{matrix}\left|\begin{matrix}P_2: \dots; \dots; (-\alpha, \sigma), [(a'_j, \alpha'_j)_{1, N}], [(a_{ji}, \alpha_{ji})_{N+1, p_i}]\\ \\ Q_2: \dots; \dots; [(b'_j, \beta'_j)_{1, M}], [(b'_{ji}, \beta'_{ji})_{M+1, Q_i}]\end{matrix}\right.\right] \qquad (2.6)$$

जहाँ

$$P_2: [1' - (\delta/\mu); v_1/\mu, v_2/\mu, \lambda], [(a_j; \alpha_j, A_j, 0)_{1, n_1}], [(a_{ji_1}, \alpha_{ji_1}, A_{ji_1}, 0)_{n_1+1, p_{i_1}}]$$

$$Q_2: [-(\delta/\mu) - \alpha; v_1/\mu, v_2/\mu, (\lambda + \sigma)], [(b_{ji_1}, \beta_{ji_1}, B_{ji_1}, 0)_{1, q_{i_1}}]$$

बशर्ते कि $v_y > 0$, $\min \mathrm{Re}\,[\delta + \lambda\mu\,(b'_{ji}/\beta'_{ji}) + v_1\,(d_{ji_2}/\delta_{ji_2})] > 0$. $j = 1, 2, \dots, M.$,

$i = 1, 2, \dots, r'.$, $j = 1, 2, \dots m_2.$, $i_2 = 1, 2$; $\min \mathrm{Re}\,[\delta + \lambda\mu\,(b'_{ji}/\beta'_{ji}) + mu_y\,(f_{ji_3}/F_{ji_3})] > 0$,

$j = 1, 2, \dots, M.$, $i = 1, 2, \dots, r'.$, $j = 1, 2, \dots m_3.$, $i_3 = 1, 2, \dots, r_3.$; $y = 2.$,

$\min \mathrm{Re}\,[\alpha + \sigma\,(b'_{ji}/\beta'_{ji}) + 1] > 0$, $j = 1, 2, \dots, M.$, $i = 1, 2, \dots, r'$.

5. $\mathrm{Re}\,(1 - \alpha^y) > k^y$ एवं $k^y = 0, 1, 2, \dots, y = 1, 2,$ के लिए हमें ज्ञात है कि

$$R\left[\begin{matrix}(\alpha^y) & (\beta^y) & (\mu^y)\\ (\beta^y) & (k^y) & (\eta^y)\end{matrix} : I\left[\begin{matrix}(u_1 t_1)^{h_1}\\ \\ (u_2 t_2)^{h_2}\end{matrix}; z_1, z_2\right]\right] = \prod_{y=1}^{2}\left\{\frac{\Gamma(\beta^y)}{\Gamma(\beta^y + k^y)}\right\}$$

$$I^{0, n_1: m_2+1, n_2+1; m_3+1, n_3+1}_{p_{i_1}, q_{i_1}: r_1: p_{i_2}+2, q_{i_2}+2: r_2; p_{i_3}+2, q_{i_3}+2; r_3}\left[\begin{matrix}(u_1 z_1)^{h_1}\\ \\ (u_2 z_2)^{h_2}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\dots; P_3\\ \\ \dots; Q_3\end{matrix}\right.\right] \qquad (2.7)$$

जहाँ

$P_3 : [1-(\eta^1/\mu^1)-(1/\mu^1), (h_1/\mu^1)], [(c_j, \gamma_j)_{1, n_2}], [(c_{ji_2}, \gamma_{ji_2})_{n_2+1, p_{i_2}}],$

$[\beta^1-(\eta^1/\mu^1)-(1/\mu^1), h_1/\mu^1]; [1-(\eta^2/\mu^2)-(1/\mu^2), (h_2/\mu^2)],$

$[e_j, E_j)_{1, n_3}], [(e_{ji_3}, E_{ji_3})_{n_3+1, p_{i_3}}], [\beta^2-(\eta^2/\mu^2)-(1/\mu^2), h_2/\mu^2].$

$Q_3 : [\beta^1+k^1-(\eta^1/\mu^1)-(1/\mu^1), h_1/\mu^1], [(d_j, \delta_j)_{1, m_2}], [(d_{ji_2}, \delta_{ji_2})_{m_2+1, q_{i_2}}],$

$[\alpha^1-(\eta^1/\mu^1)-(1/\mu^1), h_1/\mu^1], [\beta^2+k^2-(\eta^2/\mu^2)-(1/\mu^2), h_2/\mu^2], [(f_j, F_j)_{1, m_3}],$

$[(f_{ji_3}, F_{ji_3})_{m_3+1, q_{i_3}}], [\alpha^2-(\eta^2/\mu^2)-(1/\mu^2), h_2/\mu^2].$

बशर्ते कि $\min Re\,[\eta^y+h_y\mu^y(d_{ji_2}/\delta_{ji_2})]>0,\ i_2=1, 2, \ldots, r_2, j=1, 2, \ldots m_2, y=1$

$\min Re\,[\eta^y+h_y\mu^y(f_{ji_3}/F_{ji_3})]>0,\ i_3=1, 2, \ldots, r_3, j=1, 2, \ldots m_3, y=2$

$$6.\ K\left\{\begin{matrix}(\alpha^y) & (\beta^y) & (\mu^y) \\ (\beta^y) & (k^y) & (\delta^y)\end{matrix} : I_1\left[\begin{matrix}(u_1 t_1)^{h_1} \\ (u_2 t_2)^{h_2}\end{matrix}\right]; z_1, z_2\right\} = \prod_{y=1}^{2}\left\{\frac{\Gamma(\beta^y)}{\Gamma(\beta^y+k^y)}\right\}$$

$$I^{0,0:m_2+1, n_2+1; m_3+1, n_3+1}_{p_{i_1}, q_{i_1}: r_1 : p_{i_2}+2, q_{i_2}+2 : r_2 ; p_{i_3}+2, q_{i_3}+2 ; r_3}\left[\begin{matrix}(u_1 z_1)^{h_1} \\ (u_2 z_2)^{h_2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\ldots ; P_4 \\ \ldots ; Q_4\end{matrix}\right] \quad (2.8)$$

जहाँ

$P_4 : [1-\beta^1-k^1+(\delta^1/\mu^1), h_1/\mu^1)], [(c_j, \gamma_j)_{1, n_2}], [(c_{ji_2}, \gamma_{ji_2})_{n_2-1, p_{i_2}}]$

$[1-\alpha^1+(\delta^1/\mu^1), h_1/\mu^1], [1-\beta^2-k^2+(\delta^2/\mu^2), h_2/\mu^2], [(e_j, E_j)_{1, n_3}],$

$[(e_{ji_3}, E_{ji_3})_{n_3+1, p_{i_3}}], [1-\alpha^2+(\delta^2/\mu^2), h^2/\mu^2].$

$$Q_4 : [(\delta^1/\mu^1, h_1/\mu^1)], [(d_j, \delta_j)_{1, m_2}], [(d_{ji_2}, \alpha_{ji_2})_{m_2+1, q_{i_2}}], [1-\beta^1+(\delta^1/\mu^1), h_1/\mu^1];$$

$$[\delta^2/\mu^2, h_2/\mu^2], [(f_j, F_j)_{1, m_3}], [(f_{ji_3}, F_{ji_3})_{m_3+1, q_{i_3}}], [1-\beta^2+(\delta^2/\mu^2), h_2/\mu^2].$$

साथ-साथ Max Re $[\delta^{\nu} - h_{\nu}(c_{ji_2} - 1)/r_{ji_2}] > 0$, $\nu = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n_2$., $i_2 = 1, 2, \ldots r_2$.,
Max Re $[\delta^{\nu} - h_{\nu}(e_{ji_3} - 1)/E_{ji_3}] > 0$, $\nu = 2$, $j = 1, 2, \ldots, n_3$., $i_3 = 1, 2, \ldots r_3$.

उपपत्ति की विधि

उपपत्ति (2.1) की स्थापना के लिए हम परिभाषा (1.3) को व्यवहृत करते हैं, चर में परिवर्तन लाते हैं और तब अनेक साधारणीकरण करने के बाद [3,pp.64, Egn. (5.28)] की सहयात से आन्तरिक समाक्ल का मान ज्ञात करते हैं। देखें [6, 7, [8]] भी जिससे (2.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता । (2.4) से लेकर (2.8) तक के समीकरणों को भी इसी तरह क्रमशः (7, p.12, Eqn. (2.2.4); p.10, Eqn. (2.1.1); p. 251. Eqn. (C.1) एवं p.2542, Eqn. (A. 4); कतिपय साधारणीकरण के पश्चात् सम्बन्ध [8, p.330 Eqn. (2)] तथा [6, p.668-672]) एवं [4, p. 398, Eqn. (2)] के प्रयोग के बाद प्राप्त करें

3. प्रमेय

(2.2) तथा (2.3) द्वारा दिये गये $g(\rho^{\nu})$ तथा ρ^{ν} के सहित तथा $\nu, \lambda, \sigma, \mu, > 0$ AvB l\kZkv हमें प्राप्त होता है-

प्रमेय I. यदि $R^{\eta,\alpha,\lambda}_{\mu\sigma}[f(t); x]$ एवं $\bar{f}(x)$ को क्रमशः (1.3) तथा (1.7) द्वारा प्रदर्शित किया जाय तो

$$R^{\eta,\alpha,\lambda}_{\mu,\sigma}[\bar{f}(t); x] = \sum_{h=1}^{M} \sum_{h'=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h'}(k')e^{h'}}{h'!\,\delta^h} \times g(e^{h'})\,\Gamma(1+\alpha+re^{h'}) \int_0^{\infty} f(u)\,\phi_1(xu)\,du \tag{3.1}$$

जहाँ

$$\phi_1(x) = I^{m,n+1}_{p_i+1, q_i+1:r}\left[x^{\nu}\,\middle|\, \begin{matrix}[1\ (\eta/\mu)-(1/\mu)-(1/\mu)-(\lambda+\gamma)-\lambda e^{h'}, \nu/\mu]\ldots, \ldots, \\ \ldots, \ldots, [-\alpha-(\eta/\mu)-(\lambda+r)e^{h'}, \nu/\mu]\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

बशर्ते कि min Re $[\eta + \nu(b_{ji}/\beta_{ji}) + \mu\lambda(b'_{ji}/\beta'_{ji}) + 1] > 0$, $j = 1, 2, \ldots m$., $i = 1, 2, \ldots r$., $j = 1, 2, \ldots M$., $i = 1, 2, \ldots r'$, क्रमशः Min Re $[\alpha + \sigma(b'_{ji}/\beta'_{ji}) + 1] > 0$, $j = 1, 2, \ldots M$., $i = 1, 2, \ldots, r'$., तथा (3.1) तथा में श्रेणी पूर्णरूपेण अभिसारी है।

प्रमेय II. यदि $K_{\mu,\sigma}^{\delta,\alpha,\lambda}[f(t);x]$ तथा $(\bar{f};x)$ AvB øBYk'k: (1.4) तथा (1.7) से दिखावें तो

$$K_{\mu,\sigma}^{\delta,\alpha,\lambda}\ [\bar{f}(t);x]=\sum_{h=1}^{M}\sum_{h'=0}^{\infty}\frac{(-1)h'(k')e^{h'}}{h'!\,\delta^{h}}$$

$$\times\ g(e^{h'})\,\Gamma(\alpha+1+\sigma e^{h'})\int_0^{\infty}f(u)\,\phi_2(xu)\,du \qquad (3.2)$$

जहाँ $$\phi_2(x)=I_{p_i+1,q_i+1:r}^{m+1,n}\left[x^{v}\,\middle|\,\begin{matrix}\ldots,\ldots,[1-\alpha+(\delta/\mu)+\lambda+\sigma)\,e^{h'},v/\mu]\\ [(\delta/\mu)+\lambda e^{h'},v/\mu],\ldots;\ldots\end{matrix}\right] \qquad (3.4)$$

बशर्ते कि $\min\mathrm{Re}\,[\delta+v(a_{ji}-1)/\alpha_{ji}+\mu\lambda(b'_{ji}/\beta'_{ji})>0,\ j=1,2,\ldots m.,j=1,2,\ldots r.,$ $i=1,2,\ldots r'$. क्रमशः $\min\mathrm{Re}\,[\alpha+\sigma(b'_{ji}/\beta'_{ji})+1]>0, j=1,2,\ldots m, i=1,2,\ldots r'$, तथा (3.3) में श्रेणी पूर्णरूपेण अभसारी है।

प्रमेय III. यदि

$$R\left[\begin{matrix}(\alpha^{y}) & (\beta^{y}) & (\mu^{y})\\ (\beta^{y}) & (k^{y}) & (\eta^{y})\end{matrix}\ ;f(z_1,z_2)\right]$$

तथा $\bar{f}(z_1,z_2)$ को क्रमशः (1.1) एवं (1.8) द्वारा दिखाया जाय तो

$$R\left[\begin{matrix}(\alpha^{y}) & (\beta^{y}) & (\mu^{y})\\ (\beta^{y}) & (k^{y}) & (\eta^{y})\end{matrix}\ ;\bar{f}(z_1,z_2)\right]=\prod_{y=1}^{2}\left\{\frac{\Gamma(\beta^{y})\,z_y}{\Gamma(\beta^{y}+k^{y})}\right\}$$

$$\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\psi_1(z_1u_1,z_2u_2)\,f(u_1,u_2)\,du_1,du_2 \qquad (3.5)$$

जहाँ

$$\psi_1(u_1,u_2)=I_{p_{i_1},q_{i_1}:r_1:p_{i_2}+2,q_{i_2}+2:r_3;p_{i_3}+2,q_{i_3}+2;r_3}^{0,0:m_2+1,n_2+1;m_3+1,n_3+1}\left[\begin{matrix}u_1^{h_1}\\ u_2^{h_2}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\ldots,\ldots:A\\ \ldots,\ldots:B\end{matrix}\right] \qquad (3.6)$$

$A:[1-(\eta^1/\mu^1)-(2/\mu^1),(h_1/\mu^1],[(c_j,\gamma_j)_{1,n_2}],[(c_{ji_2},\gamma_{ji_2})_{n_2+1,p_{i_2}}],$

$[\beta^1-(\eta^1/\mu^1)-(2/\mu^1),h_1/\mu^1];[1-(\eta^2/\mu^2)-(2/\mu^2),h_2/\mu^2],[(e_j,E_j)_{1,n_3}],$

$[(e_{ji_3}, E_{ji_3})_{n_3+1, p_{i_3}}], [\beta^2 - (\eta^2/\mu^2) - (2/\mu^2), h_2/\mu^2].$

$B : [\beta^1 - (\eta/\mu^1) - (2/\mu^1) + k^1, h_1/\mu^1)], [(d_j, \delta_j)_{1, m_2}], [(d_{ji_2}, \delta_{ji_2})_{m_2+1, q_{i_2}}],$

$[\alpha^1 - (\eta^1/\mu^1) - (2/\mu^1), h_1/\mu^1]; [\beta^2 - (\eta^2/\mu^2) - (2/\mu^2) + k^2, h_2/\mu^2], [(i_j, F_j)_{1, m_3}],$

$[(f_{ji_3}, F_{ji_3})_{m_3+1, q_{i_3}}], [\alpha^2 - (\eta^2/\mu^2) - (2/\mu^2), h_2/\mu^2].$

बशर्ते कि $\mathrm{Re}\,[\eta^y + h_y(d_{ji_2}/\delta_{ji_2}) + 1] > 0$, $j = 1, 2, \ldots m_2$., $i_2 = 1, 2, \ldots r_2$., $y = 1$. $\mathrm{Re}\,[\eta^y + h_y(f_{ji_3}/F_{ji_3}) + 1] > 0$, $j = 1, \ldots m_3$., $i_3 = 1, 2, \ldots, r$., $y = 2$, तथा $k_y = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathrm{Re}\,(1 - \alpha^y) > k^y$; $y = 1, 2$, और (3.5) में बहुगुण समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी है।

प्रमेय IV. यदि

$$K\left[\begin{matrix}(\alpha^y) & (\beta^y) & (\mu^y)\\ (\beta^y) & (k^y) & (\delta^y)\end{matrix}; f(z_1, z_2\right]$$

तथा $f(z_1, z_2)$ को क्रमशः (1.2) तथा (1.3) द्वारा दिखाया जाय तो

$$K\left[\begin{matrix}(\alpha^y) & (\beta^y) & (\mu^y)\\ (\beta^y) & (k^y) & (\delta^y)\end{matrix}; \bar{f}(z_1, z_2)\right] = \prod_{y=1}^{2}\left\{\frac{z_y\,\Gamma(\beta^y)}{\Gamma(\beta^y + k^y)}\right\}$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_2(z_1 u_1, z_2 u_2)\, f(u_1, u_2)\, d u_1\, d u_2 \qquad (3.7)$$

जहाँ

$$\psi_2(u_1, u_2) = I^{0, 0 : m_2+1, n_2+1 ; m_3+1, n_3+1}_{p_{i_1}, q_{i_1} : r_1 : p_{i_2}+2, q_{i_2}+2 : r_2 ; p_{i_3}+2, q_{i_3}+2 ; r_3}\left[\begin{matrix}u_1^{h_1}\\ u_2^{h_2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\ldots, \ldots ; E\\ \ldots, \ldots ; R\end{matrix}\right] \qquad (3.8)$$

$E : [1 - \beta^1 - (\delta^1/\mu^1) - k^1, h_1/\mu^1], [(c_j, \gamma_j)_{1, n_2}], [(c_{ji_2}, \gamma_{ji_2})_{n_2+1, p_{i_2}}],$

$[1 - \alpha^1 + (\delta^1/u^1) - (1/\mu^1]; [1 - \beta^2 - (\delta^2/\mu^2) - (1/\mu^2) - k^2, h_2/\mu^2]$

$[(e_j, E_j)_{1, n_3}], [(e_{ji_3}, E_{ji_3})_{n_3+1, p_{i_3}}], [1 - \alpha^2 + (\delta^2/\mu^2) + (\delta^2/\mu^2) - (1/\mu^2) - h_2/\mu^2].$

$$F : [(\delta^1/\mu^1) - (1/\mu^1), h_1/\mu^1], [d_j, \delta_j)_{1, m_2}], [(d_{ji_2}, \delta_{ji_2})_{m_2+1, q_{i_2}}],$$

$$[1 - \beta^1 + (\delta^1/\mu^2) - (1/\mu^1), h_1/\mu^1]; [(\delta^2/\mu^2) - (1/\mu^2), h_2/\mu^2], [(f_j, F_j)_{1, m_3}],$$

$$[(f_{ji_3}, F_{ji_3})_{m_3+1, q_{i_3}}], [1 - \beta^2 + (\delta^2/\mu^2) - (1/\mu^2), h_2/\mu^2].$$

बशर्ते कि max Re $[\delta - h_y (c_{ji_2} - 1)/\gamma_{ji}] > 0$, $j = 1, \ldots, n_2$, $i_2 = 1, 2, \ldots, r_2$, $y = 1$, Max Re $[\delta - h_y (e_{ji_3} - 1)/E_{ji_3}] > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n_3$, $i_3 = 1, 2, \ldots, r_3$, $y = 2$, तथा (3.7) में बहुगुण समाकल विद्यमान है।

उपपत्ति की विधि

प्रमेय I को स्थापित के लिए हम (3.1) में (1.3) तथा (1.7) को व्यवहृत करते हैं, समाकलन के क्रम को बदलते हैं और तब वांछित परिणाम पाने के लिए (2.1) का उपयोग करते हैं।

प्रमेय II, III तथा IV को इसी तरह क्रमशः (2.4) (2.7) तथा (2.8) के सम्प्रयोग से स्थापित किया जाता है।

टिप्पणी : यहाँ पर स्थापित हुए आंशिक समाकलों तथा प्रमेयों से अनेक ज्ञात तथा नवीन विशिष्ट दशाएं प्राप्त की जा सकती हैं किन्तु उन्हें स्थानाभाव के कारण यहाँ नहीं दिया जा रहा।

निर्देश

1. अग्रवाल, एम० के० : *Acta. Ciencia. India*, प्रेषित
2. वही : *Acta ciencia Indica*, प्रकाशनार्थ स्वीकृ त
3. वही : ज्ञानाभ, प्रकाशनार्थ प्रेषित
4. एर्डेल्यी इत्यादि : Tables of Integral Transforms. भाग 2, MacGraw Hill, New York, 1954
5. सक्सेना, वी० पी० : *Proc. Nat. Acad. Sci.* India, 1952, 52 (A), II, 336-375.
6. शर्मा, सी० के० तथा मिश्रा, पी० एल० : *Acta Ciencia Indica* 1991, 17 (M4), 667-672.
7. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, सी० के० तथा गोयल, एस० पी० : The H-functions of one and two variables with Applications, South Asian Publisher, New Delhi and Madras (1982)
8. वैश्य, जी० डी०, जैन, रेनु तथा वर्मा, आर० सी० : *Proc. Nat. Acad. Sci. India*, 1989, 59 (A), II, 329-337.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 3, July 1997.

दो चरों के H-फलन वाला समाकल निरूपण

जे० पी० सिंहल तथा एस० एस० भाटी

गणित विभाग, जोधपुर विश्व विद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त-जनवरी 2, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में ऐसे परिणाम को सिद्ध किया गया है जिसमें डहिया द्वारा इससे पूर्व सिद्ध किये गये दो समाकल विशिष्ट दशाओं के रूप में सन्निहित हैं।

Abstrac

Integral representation involving H-function of two variables. *By* J. P. Singhal and S. S. Bahti, Depertment of Mathmatics, University of Jodhpur, Jodhpur (Raj.).

In the resent paper we prove a result which includes, as particuler cases, the two integals proved earles by Dahiya.

1. प्रस्तावना

हाल ही में दो चरों वाले G-फलन का विस्तार, जिसका सूत्रपात अग्रवाल[1] द्वारा विश्लेषण में किया गया है, मुनोट तथा कलला[7] एवं मित्तल तथा गुप्ता[6] द्वारा भी दिया गया है। मित्तल तथा गुप्ता[6] का अनुसरण करते हुए दो चरों वाला सार्वीकृत फलन जिसे $H\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right]$ द्वारा व्यक्त किया जाता है द्विगुण मेलिन-बर्नीज प्रकार के कंटूर समाकल द्वारा निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

$$H\left[\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0, & n_1\\ p, & q\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2\\ r, & s\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, & n_3\\ k, & 1\end{pmatrix}\end{array}\left|\begin{array}{c}(a_p;\alpha_p,A_p)\\(b_q;\beta_q;B_q)\\(c_r;C_r)\\(d_s;D_s)\\(e_k;E_k)\\(f_1;F_1)\end{array}\right|\begin{array}{c}x\\ \\ y\end{array}\right] = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(\xi,\eta)\,\theta_1(\xi)\,\theta_2(\eta)\,x^{\xi}\,y^{\eta}\,d\xi\,d\eta \tag{1.1}$$

जहाँ $(a_p;\alpha_p,A_p)$ से $(a_1;\alpha_1,A_1)$, $(a_2;\alpha,A_2)\ldots\ldots(a_p;\alpha_p,A_p)$ का बोध होता है तथा

$$\phi(\xi,\eta) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma\left(1-a_j+\alpha_j\xi+A_j\eta\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(1-b_j+\beta_j\xi+B_j\eta\right)\prod_{j=n_1+1}^{p}\Gamma\left(a_j-\alpha_j\xi-a_j\eta\right)},$$

$$\theta_1(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma\left(d_j-D_j\xi\right)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma\left(1-c_j+C_j\xi\right)}{\prod_{j=m_2+1}^{s}\Gamma\left(1-d_j+D_j\xi\right)\prod_{j=n_2+1}^{r}\Gamma\left(c_j-C_j\xi\right)},$$

$$\theta_2(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma\left(f_j-F_j\eta\right)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma\left(1-e_j+E_j\eta\right)}{\prod_{j=m_3+1}^{1}\Gamma\left(1-f_j+F_j\eta\right)\prod_{j=n_3+1}^{k}\Gamma\left(e_j-E_j\eta\right)}$$

x, y शून्य के तुल्य नहीं हैं तथा रिक्त गुणनफल इकाई माना जाता है तथा $p, q, r, s, k, l;$ $n_1, n_2, n_3\, m_2$ एवं m_3 अनृण पूर्ण संख्याएँ हैं जिससे कि $p \geq n_1 \geq 0$, $r \geq n_2 \geq 0$, $k \geq n_3 \geq 0$; $q \geq 0; s \geq m_2 \geq 0, 1 \geq m_3 \geq 0$ एवं समस्त अचर $\alpha_p, \beta_q, C_r, D_s, A_p, B_q, E_k, F_1$ धन मात्राओं को बताने वाले हैं।

कंटूर L_1 ξ– तल पर स्थित है और अपने लूपों सहित $i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तृत है जिससे यदि आवश्यकता पड़े तो आश्वस्त रहा जा सके कि $\Gamma(d_j - D_j\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, m_2$; के पोल कं टू र के बाईं ओ र स्थित हैं तथा $\Gamma(1 - c_j + C_j\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, n_2$; $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j\xi + A_j\eta)$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$, के पोल कंटूर के बाईं ओर ।

पुनः कंटूर L_2 η– तल पर है जो अपने लूप सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तृत है और आवश्यकता पडे तो आश्वस्त रहा जा सकता है कि $\Gamma(f_j - F_j\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, m_3$, के पोल कंटूर के दाईं ओर स्थित हैं तथा $\Gamma(1 - e_j + E_j\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, n_3$, के पोल कंटूर के बाईं ओर।

(1.1) द्वारा परिभाषित फलन x तथा y का विश्ले षिक फलन है यदि-

(i) $\sum_{j=1}^{p}\left(\alpha_j\right) + \sum_{j=1}^{r}\left(C_j\right) < \sum_{j=1}^{q}\left(\beta_j\right) + \sum_{j=1}^{s}\left(D_j\right)$,

(ii) $\sum_{j=1}^{p}\left(A_j\right) + \sum_{j=1}^{k}\left(E_j\right) < \sum_{j=1}^{q}\left(B_j\right) + \sum_{j=1}^{1}\left(F_j\right)$,

(iii) $$U = \sum_{j=1}^{n_1}\left(\alpha_j\right) - \sum_{j=n_1+1}^{p}\left(\alpha_j\right) - \sum_{j=1}^{q}\left(\beta_j\right) + \sum_{j=1}^{m_2}\left(D_j\right)$$
$$- \sum_{j=m_2+1}^{s}\left(D_j\right) + \sum_{j=1}^{n_2}\left(C_j\right) - \sum_{j=n_2+1}^{r}\left(C_j\right) > 0,$$

(iv) $|\arg x| < \frac{1}{2} U\pi$

(v) $$V = \sum_{j=1}^{n_1}\left(A_j\right) - \sum_{j=n_1+1}^{p}\left(A_j\right) - \sum_{j=1}^{q}\left(B_j\right) + \sum_{j=1}^{m_3}\left(F_j\right)$$
$$- \sum_{j=m_3+1}^{1}\left(F_j\right) + \sum_{j=1}^{n_3}\left(E_j\right) - \sum_{j=n_3+1}^{k}\left(E_j\right) > 0$$

तथा

(vi) $|\arg y| < \frac{1}{2} V\pi$

x तथा y के दीर्घ तथा लघु मानों पर आचरण के लिए $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ के आचरण तथा अन्य गुणों लिए भी देखें निर्देश [6] ।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करेंगे जिसमें इसके पूर्व डहिया द्वारा सिद्ध किये गये दो समाकल[3,4] विशिष्ट दशाओं के रूप में सम्मिलित हैं।

$$\int_0^\infty\int_0^\infty y^{2\mu-1}x^{2\upsilon-1}\frac{\left(x^2+y^2\right)}{\left(a^2y^2+b^2x^2\right)^{\mu+\upsilon}}f\left(x^2+y^2\right)$$

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ p, & q \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_p;\alpha_p,A_p \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} b_q;\beta_q;B_q \end{pmatrix} & \dfrac{\upsilon x^{2\sigma}\,y^{2\sigma}\,(x^2+y^2)}{(a^2y^2+b^2x^2)^{2\sigma}} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ r, & s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_r;C_r \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} d_s;D_s \end{pmatrix} & \dfrac{\beta x^{2\rho}\,y^{2\rho}\,(x^2+y^2)}{(a^2y^2+b^2x^2)^{2\rho}} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ k, & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_k;E_k \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} f_1;F_1 \end{pmatrix} & \end{array}\right] dx\,dy$$

$$=\frac{1}{4}\,a^{-2\mu}\,b^{-2\upsilon}\int_0^\infty f(z)\,.$$

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 0, & 2 \\ p+2, & q+1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_p;\alpha_p,A_p \end{pmatrix},(1-\mu;\sigma,\rho),(1-\upsilon;\sigma,\rho) & \\ & \begin{pmatrix} b_q;\beta_q;B_q \end{pmatrix},(1-\mu-\upsilon;2\sigma,2\rho) & \dfrac{\alpha z}{(a\,b)^{2\sigma}} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ r, & s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_r;C_r \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} d_s;D_s \end{pmatrix} & \dfrac{\beta z}{(a\,b)^{2\rho}} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ k, & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_k;E_k \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} f_1;F_1 \end{pmatrix} & \end{array}\right] dz \tag{1.2}$$

जहाँ σ एवं ρ धन संख्याएँ हैं तथा

$$\sum_{j=1}^{p}\left(\alpha_j\right)+\sum_{j=1}^{r}\left(C_j\right)<\sum_{j=1}^{q}\left(\beta_j\right)+\sum_{j=1}^{s}\left(D_j\right),$$

$$\sum_{j=1}^{p}\left(A_j\right)+\sum_{j=1}^{k}\left(E_j\right)<\sum_{j=1}^{q}\left(B_j\right)+\sum_{j=1}^{1}\left(F_j\right),$$

$$U=-\sum_{j=1}^{p}\left(\alpha_j\right)-\sum_{j=1}^{q}\left(\beta_j\right)+\sum_{j=1}^{m_2}\left(D_j\right)-\sum_{j=m_2+1}^{s}\left(D_j\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\left(C_j\right)-\sum_{j=n_2+1}^{r}\left(C_j\right)>0$$

$$|\arg\alpha|<\frac{1}{2}U\pi$$

$$V=-\sum_{j=1}^{p}\left(A_j\right)-\sum_{j=1}^{q}\left(B_j\right)+\sum_{j=1}^{m_3}\left(F_j\right)-\sum_{j=m_3+1}^{1}\left(F_j\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n_3}\left(E_j\right)-\sum_{j=n_3+1}^{k}\left(E_j\right)>0$$

तथा

$$|\arg\beta|<\frac{1}{2}V\pi$$

$\mathrm{Re}(\mu, \upsilon) > 0$, $f(z) = 0(z^{-\delta})$ दीर्घ z के लिए एवं $f(z) = O(Z^{\varepsilon-1/2})$ लघु z के लिए $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$.

(1.2) के दक्षिण पक्ष का मान $f(z)$ को उपयुक्त मान प्रदान करके ज्ञात किया जा सकता है।

2. (1.2) की उपपत्ति

(1.2) के वाम पक्ष को I से सूचित करने पर हम पाते हैं कि

$$I=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{L_1}\int_{L_2} y^{2\mu+2\sigma\xi+2\rho\eta-1}\, x^{2\upsilon+2\sigma\xi+2\rho\eta-1}$$

$$\times\frac{(x^2+y^2)^{\xi+\eta+1}}{(a^2y^2+b^2x^2)^{\mu+2\sigma\xi+2\rho\eta}}\, f(x^2+y^2)$$

$$\times\,\phi(\xi,\eta)\,\theta_1(\xi)\,\theta_2(\eta)\,\alpha^{\xi}\beta^{\eta}\,d\xi\, d\eta\, dy\, dx.$$

समाकलन के क्रम को बदलकर, जो प्रक्रिया में निहित समाकल के परम अभिसरण के फलस्वरूप वैध मान लिया गया है, तथा निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty \int_0^\infty y^{2\mu-1}\, x^{2\upsilon-1}\, \frac{(x^2+y^2)}{(a^2y^2+b^2x^2)^{\mu+\gamma}} f(x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{4} a^{-2\mu}\, b^{-2\upsilon}\, \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\mu+\gamma)} \int_0^\infty f(z)\, dz$$

$$\mathrm{Re}\,(\mu,\gamma) > 0,$$

हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है।

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1}\int_{L_2} \phi(\xi,\eta)\,\theta_1(\xi)\,\theta_2(\eta)\,\alpha^{\xi}\beta^{\eta}$$

$$\times \frac{1}{4}\, \frac{\Gamma(\mu+\sigma\xi+\rho\eta)\,\Gamma(\upsilon+\sigma\xi+\rho\eta)}{a^{2\mu+2\sigma\xi+2\rho\eta}\, b^{2\upsilon+2\sigma\xi+2\rho\eta}\, \Gamma(\mu+\upsilon+2\sigma\xi+2\rho\eta)} \int_0^\infty z^{\xi+\eta} f(z)\, dz\, d\xi\, d\eta$$

जो पुनः एक बार समाकलन के क्रम को परस्पर परिवर्तित करने तथा परिणामी व्यंजक को (1.1) की सहायता से विवेचना करने पर वांछित परिणाम प्रदान करता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

चूंकि (1.2) के समाकल्य में आये दो चरों वाले H-फलन में अनेक फलन मिलते हैं इसलिए इसके विशिष्टीकरण द्वारा तमाम विशिष्ट दशाएँ प्राप्त की जा सकती हैं। निम्नलिखित विशिष्ट दशाएँ दृष्टव्य हैं।

यदि हम (1.2) में α_p, A_p, β_q, B_q, C_r, D_s, E_k तथा F_l सबों को इकाई के तुल्य रखें तो $\rho = \sigma$ तथा b_q, c_r, e_k को क्रमशः $1-c_r$ एवं $1-e_k$ से स्थानान्तरित कर दें तो दो चरों का फलन दो चरों वाले G-फलन में समानीत हो जाता है[1] और इस तरह हमें

$$\int_0^\infty \int_0^\infty y^{2\mu-1}\, x^{2\upsilon-1}\, \frac{(x^2+y^2)}{(a^2y^2+b^2x^2)^{\mu+\upsilon}} f(x^2+y^2)$$

$$\times\, G^{0,\,n_2,\,n_3,\,m_2,\,m_3}_{p,\,[r,\,k],\,q,\,[s,\,1]} \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\alpha x^{2\sigma} y^{2\sigma} (x^2+y^2)}{(a^2y^2+b^2x^2)^{2\sigma}} & \begin{array}{c}(a_p)\\ (c_r);\ (e_k)\end{array} \\ \dfrac{\beta x^{2\sigma} y^{2\sigma} (x^2+y^2)}{(a^2y^2+b^2x^2)^{2\sigma}} & \begin{array}{c}(b_q)\\ (d_s);\ (f_1)\end{array} \end{array} \right] dy\, dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{1/2} \frac{a^{-2\mu}\, b^{-2\upsilon}}{2^{\mu+\upsilon+1}} \int_0^{\infty} f(z)$$

$$\times\, G^{2\sigma, n_2, n_3, m_2, m_3}_{p+2\sigma, [r,k], q+2\sigma, [s,1]} \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\alpha z}{(2ab)^{2\sigma}} & \nabla(\sigma, \mu), \nabla(\sigma, \gamma), (a_p) \\ & (c_r); (e_k) \\ \dfrac{\beta z}{(2ab)^{2\sigma}} & (b_q); \Delta(2\sigma, \mu+\gamma) \\ & (d_s); (f_1) \end{array} \right] dz \tag{3.1}$$

प्राप्त होता है जहाँ $\Delta(n, a)$ निम्नलिखित प्राचलों के सेट के लिए आया है-

$$\frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}, \ldots, \frac{a+n-1}{n}, \text{ तथा } \nabla(n, a) \text{ क्योंकि}$$

$$\left(1-\frac{a}{n}\right), \left(1-\frac{a+1}{n}\right), \ldots, \left(1-\frac{a+n\ \ 1}{n}\right).$$

समाकल (3.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है-

$$2\left(n_2+m_2\right) > p+q+r+s$$

$$2\left(n_3+m_3\right) > p+q+k+1$$

$$|\arg \alpha| < \left(n_2+m_2-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}-\frac{r}{2}-\frac{s}{2}\right)\pi$$

$$|\arg \beta| < \left(n_3+m_3-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)\pi$$

Re $((\mu, \upsilon) > 0$, $f(z) = O(z^{-\delta})$ दीर्घ z के लिए तथा $f(z) = O(z^{\varepsilon-1/2})$ लघु z के लिए $\delta > 0$,एवं $\varepsilon > 0$.

(3.1) की विशिष्ट दशा जब $n_3 = k = 0$; $m_3 = l = 1$; $f_1 = 0$, $\sigma = 1$ एवं $\beta \to 0$ निम्नलिखित परिणाम के संगत है

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y^{2\mu-1} x^{2\upsilon-1} \frac{\left(x^2+y^2\right)}{\left(a^2y^2+b^2x^2\right)^{\mu+\upsilon}} f\left(x^2+y^2\right)$$

$$\times\, G_{p,q}^{m,n}\left(\frac{\alpha\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}{\left(a^2y^2+b^2x^2\right)^2}\left|\begin{matrix}\left(a_p\right)\\ \left(b_q\right)\end{matrix}\right.\right)dx\,dy$$

$$=\sqrt{x}\,\frac{2^{-1-\mu-\gamma}}{a^{2\mu}b^{2\gamma}}\int_0^\infty f(z)$$

$$\times\, G_{p+2,q+2}^{m,n+2}\left(\frac{az}{4ab}\left|\begin{matrix}1-\mu,\ 1-\upsilon;\ \left(a_p\right)\\ \left(b_q\right);\ 1-\frac{\mu}{2}-\frac{\upsilon}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\upsilon}{2}\end{matrix}\right.\right)dz \tag{3.2}$$

जहाँ

$|\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}\right)\pi$, $\mathrm{Re}\,(\mu,\nu) > 0$, $f(z)=0\left(z^{-\delta}\right)$ दीर्घ z के लिए एवं

$f(z) = O(z^{\varepsilon-1/2})$ लघु z के लिए $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. डहिया[3] के फलस्वरूप है।

अपरंच, H-फलन के निम्नलिखित गुण का उपयोग करने पर

$$\lim_{y\to 0} H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, & 0\\ 0, & q\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2\\ r, & s\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\text{—})\\ \left(b_q;\beta_q;B_q\right)\\ \left(c_r;C_r\right)\\ \left(d_s;D_s\right)\\ (\text{—})\\ (0,\ 1)\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$= H_{r,q+s}^{m_2,n_2}\left[x\left|\begin{matrix}\left(c_r;\ C_r\right)\\ \left(d_s;\ D_s\right),\left(b_q;\ B_q\right)\end{matrix}\right.\right] \tag{3.3}$$

तथा निहित प्राचलों में थोड़ा सा परिवर्तन करने पर (1.2) से अन्य परिणाम प्राप्त होता है और वह भी डहिया के फलस्वरूप है। [4]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty y^{2\mu-1} x^{2\upsilon-1} \frac{\left(x^2+y^2\right)}{\left(a^2 y^2+b^2 x^2\right)^{\mu+\upsilon}} f\left(x^2+y^2\right)$$

$$\times H^{m,n}_{p,q}\left(\frac{\alpha\left(x^2+y^2\right)x^{2h} y^{2h}}{\left(a^2 y^2+b^2 x^2\right)^{2h}} \middle| \begin{matrix}\left(a_p ; e_p\right) \\ \left(b_q ; f_q\right)\end{matrix}\right) dy\, dx$$

$$= \frac{a^{-2\mu} b^{-2\upsilon}}{4} \int_0^\infty f(z)\, H^{m,\, n+2}_{p+2,\, q+1}\left[\frac{\alpha z}{(ab)^{2h}} \middle| \begin{matrix}(1-\mu; h), (1-\upsilon, h), (a_p ; e_p) \\ (b_q ; f_q), (1-\mu-\upsilon; 2h)\end{matrix}\right] ds \tag{3.4}$$

जहाँ h धन संख्या है तथा $\sum_{j=1}^{p}\left(e_j\right)-\sum_{j=1}^{q}\left(f_j\right)<0$,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(e_j\right)-\sum_{j=n+1}^{p}\left(e_j\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(f_j\right)-\sum_{j=m+1}^{q}\left(f_j\right) \equiv k>0;$$

$|\arg \alpha| < \frac{1}{2} k\pi$, $\mathrm{Re}(\mu, \upsilon) > 0; f(z) = 0(z^{-\delta})$ दीर्घ z के लिये तथा $f(z) = O(z^{\varepsilon-1/2})$ लघु z के लिए, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$.

निर्देश

1. अग्रवाल आर० पी०, : Proc. Nat. Inst. Sci. India 1965, 31, 536-546.
2. ब्रामविच, टी० जे० आई०, : Theory of Infinite series, 1959.
3. डहिया, आर० एस०, :Proc. Japan Acad, 1971 , 47, 365-367.
4. डहिया, आर० एस०, : An. Fac. Ci. Univ. Porto, 1971, 54, 363-367.
5. फाक्स, सी०, : Trans. Amer. Math. Soc., 1961, 98, 395-429.
6. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, : Proc. Indian Academy Sciences, 1972 75, 117-125.
7. मुनोट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, : University Nac. Tucumann, Rev. Ser. A. 1971, 21, 67-87

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 3, July 1997.

दो चरों वाले सार्विकृत H-फलन वाले कुछ सम्बन्ध

एच० एस० पी० श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय कला तथा विज्ञान महा-विद्यालय,
रतलाम (म० प्र०)

[प्राप्त- अप्रैल 2, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य ज्ञात सम्बन्धों की सहायता से दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के लिए आठ सम्बन्ध स्थापित करना है। अनेक रोचक नवीन परिणामों को इनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

Abstract

Some relations involving the genralized H-function of two variables. *By* H. S. P. Shrivastava, Department of Mathematics, Govt. Arts and Science College, Ratlam (M.P.).

The object of the present paper is to establish eight relations for the genralized H-function of two variables with the help of known relations. Since the results on of most genralized character, the study will extend and unify a number of scattered results given from time to time by many authors. Many known and interesting new results may be derived as particular cases.

1. प्रस्तावना

लेखक द्वारा ज्ञात[1,2] किये गये दो चरों वाले सर्वीकृत H-फलन को निम्नवत् प्रदर्शित किया जावेगा। इसमें हमने श्रीवास्तव द्वारा दिये गये[3,9] संक्षिप्त संकेतनों तथा विविध कल्पनाओं को ग्रहण किया है।

$$H(x, y) \equiv H^{m_1, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1, q_1 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|c} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})) : ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ y & ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \int_T \psi(s, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s y^t \, ds\, dt, \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\psi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j - B_j s - B'_j t) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_j + A_j s + A'_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + B_j s + B'_j t) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - A_j s - A'_j t)},$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - D_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + C_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + D_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - C_j s)},$$

$$\theta_2(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j t)},$$

यहाँ x, y संमिश्र चर हैं, प्राचल

$$a_j, j = 1, ..., p_1; c_j, j = 1, ..., p_2; e_j, j = 1, ..., p_3;$$

$$b_j, j = 1, ..., q_1; d_j, j = 1, ..., q_2; f_j, j = 1, ..., q_3;$$

संमिश्र संख्याएँ हैं तथा सम्बध्द गुणांक $A_j, A'_j, B_j, B'_j, C_j, D_j, E_j, F_j$ धन वास्तविक संख्याएँ हैं; $m_i, n_i, p_i; q_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ऐसे अनृण पूर्णांक. हैं कि

$$0 \le m_2 \le q_i, \; 0 \le n_i \le p_i$$

समाकल (1.1) पूर्णतया अभिसारी होता है यदि

$$|arg(x)| < \frac{1}{2}A\pi, |arg(y)| < \frac{1}{2}B\pi$$

जहाँ

$$A \equiv \sum_{j=1}^{n_1} A_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j + \sum_{j+1}^{n_2} C_j + \sum_{j=1}^{m_2} D_j - \sum_{j=n_1+1}^{p_1} A_j - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} B_j - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} C_j - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} D_j > 0$$

$$B = \sum_{j=1}^{n_1} A'_j + \sum_{j=1}^{m_1} B'_j + \sum_{j+1}^{n_3} E_j + \sum_{j=1}^{m_3} F_j - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} B'_j - \sum_{j=n_1+1}^{p_1} A'_j - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} E_j - \sum_{j=m_3+1}^{q_3} F_j > 0$$

आगे, संक्षेपण की दृष्टि से

$$P \equiv \min_{\substack{1 \le i \le m_1 \\ 1 \le j \le m_2}} \left(\frac{b_i}{B_i} + \frac{b_i}{B'_i} + \frac{d_j}{D_j} \right); \; Q \equiv \min_{\substack{1 \le i \le m_1 \\ 1 \le k \le m_3}} \left(\frac{b_i}{B_i} + \frac{b_i}{B'_i} + \frac{f_k}{F_k} \right)$$

निम्नलिखित ज्ञात सम्बन्ध [10; 12; 13, 4; 11, p.110, 114] प्रस्तुत शोधकार्य के विकास में काम आते हैं।

$${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(a+1, b; c; z) - \frac{bz}{c} \cdot {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z), \tag{1.2}$$

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{b}{c}\, {}_2F_1(a, b+1; c+1; z) - \frac{(c-b)}{c} \cdot {}_2F_1(a, b; c+1; z), \tag{1.3}$$

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \cdot {}_2F_1(a, b; a+b+1-c;\; 1-z)$$

$$+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)(1-z)^{a+b-c}} \cdot {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z), \tag{1.4}$$

$${}_3F_2(a, b, c+1; d, c; z) = {}_2F_1(a, b; d; z) + \frac{abz}{cd} \cdot {}_2F_1(a+1, b+1; d+1; z) \tag{1.5}$$

$${}_2F_1(a, b; a-b+2; -1) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a-b+2)}{2^a(b-a)} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\Gamma(a/2)\,\Gamma\left(\frac{3+a-2b}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+a-2b}{2}\right)} \right], \tag{1.6}$$

$$ {}_2F_1\left(a, b ; \frac{a+b+2}{2} ; \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma[(a+b+2)/2]}{(a-b)} \times \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \right], \tag{1.7}$$

$$ {}_3F_2(a, b, 1; c, 2; 1) = \frac{(c-1)}{(a-1)(b-1)} \times \left[\frac{\Gamma(c-1)\,\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} - 1 \right], \tag{1.8}$$

$$ {}_3F_2(a, b, 1; c, 3; 1) = \frac{2(c-2)_2}{(a-2)_2\,(b-2)_2} \times \left[\frac{\Gamma(c-2)\,\Gamma(c-a-b+2)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} - 1 \right] - \frac{2(c-1)}{(a-1)(b-1)}. \tag{1.9}$$

2. प्रमुख परिणाम

इस अनुभाग में निम्नलिखित आद अत्यन्त सर्वीकृत सम्बन्धों की स्थापना की जायेगी।

$$H^{m_1+2, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (c+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ y & (a+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2) ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array} \right]$$

$$= H^{m_1+3, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+2, q_1+3 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (a+1 ; \lambda_1, \lambda_2) \\ y & (a ; \lambda_1, \lambda_2), (a+\gamma+1; \lambda_1, \lambda_2) (b+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), \end{array} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (c+\gamma;\lambda_1,\lambda_2):((c_{p_2},\ C_{p_2}));((e_{p_3},\ E_{p_3})) \\ ((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})):((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$-\ Z\, H^{m_1+3,\, n_1\,:\,(m_2,\, n_2);\,(m_3,\, n_3)}_{p_1+2,\, q_1+3\,:\,[p_2,\, q_2];\,[p_3,\, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})),(a+1;\lambda_1,\ \lambda_2), \\ (a;\lambda_1,\lambda_2),(a+\gamma+1;\lambda_1,\lambda_2)\,(b+\gamma+1;\lambda_1,\lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (c+\gamma+1;\lambda_1,\lambda_2):((c_{p_2},\ C_{p_2}));((e_{p_3},\ E_{p_3})) \\ ((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})):((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

(2.1)

बशर्ते कि γ अनृण पूर्णांक हो, a, b, c धन समिश्र संख्याएँ हैं तथा λ_1, λ_2 धन वास्तविक संख्याएँ हैं, $|arg\,(x)| < \frac{1}{2} A\,\pi$, $|arg\,(y)| < \frac{1}{2} B\,\pi$, $\mathrm{Re}\left(a + \gamma - \lambda_1 P - \lambda_2 Q \right) > 0$, $\mathrm{Re}\left(b + \gamma - \lambda_1 P - Q\,\lambda_2 \right) > 0$,

$$H^{m_1+2,\, n_1\,:\,(m_2,\, n_2);\,(m_3,\, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2\,:\,[p_2,\, q_2];\,[p_3,\, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})),(c+\gamma;\lambda_1,\ \lambda_2): \\ (a+\gamma;\lambda_1,\lambda_2),(b+\gamma;\lambda_1,\lambda_2),((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})): \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} ((c_{p_2},\ C_{p_2}));((e_{p_3},\ E_{p_3})) \\ ((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$= H^{m_1+2,\, n_1\,:\,(m_2,\, n_2);\,(m_3,\, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2\,:\,[p_2,\, q_2];\,[p_3,\, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})),(c+\gamma+1;\lambda_1,\ \lambda_2): \\ (a+\gamma;\lambda_1,\lambda_2),(b+\gamma+1;\lambda_1,\lambda_2),((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})): \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} ((c_{p_2},\ C_{p_2}));((e_{p_3},\ E_{p_3})) \\ ((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$+\,(c-b)\,H^{m_1+2,\, n_1\,:\,(m_2,\, n_2);\,(m_3,\, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2\,:\,[p_2,\, q_2];\,[p_3,\, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};A_{p_1},A'_{p_1})),(c+\gamma+1;\lambda_1,\ \lambda_2): \\ (a+\gamma;\lambda_1,\lambda_2),(b+\gamma;\lambda_1,\lambda_2),((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})): \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right] \tag{2.2}$$

बशर्ते कि प्रतिबन्ध (2.1) के से हों ।

$$Z^r H^{m_1+2, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (c+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2) : \\ (a+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{(1-z)^r}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \times H^{m_1+3, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+2, q_1+3 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]}$$

$$\times \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1+a+b-c ; \lambda_1, \lambda_2), ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), \\ (a+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2), (a+b-c+1; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (a+b-c+1+\gamma ; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$+ (1-z)^{\gamma+c-a-b} H^{m_1+1, n_1+1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]}$$

$$\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a+b-c ; \lambda_1, \lambda_2, ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})) : \\ (a+b-c ; \lambda_1, \lambda_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})), (1+a+b-c-r ; \lambda_1, \lambda_2) : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right] \tag{2.3}$$

बशर्ते कि γ अनृण पूर्णांक हैं, a, b, c धन संमिश्र संख्याएँ हैं, λ_1, λ_2 धन वास्तविक संख्याएँ हैं, $|\arg(x)| < \frac{1}{2} A\pi$, $\arg(y) | < \frac{1}{2} B\pi$, $|z| < 1$, $|1-z| < 1$, $\text{Re}(c-b) > 0$, $\text{Re}[a+\gamma-\lambda_1 P-\lambda_2 Q] > 0$, $Re(b+\gamma-\lambda_1 P-\lambda_2 Q) > 0$, $\text{Re}(a+b-c-\gamma-\lambda_1 P-\lambda_2 Q) > 0$.

$$H^{m_1+2,\, n_1 : (m_2,\, n_2); (m_3,\, n_3)}_{p_1+2,\, q_1+3 : [p_2,\, q_2]; [p_3,\, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (c+\gamma; \lambda_1, \lambda_2) : \\ (a+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (d+\gamma; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ (c+\gamma+1; \lambda_1, \lambda_2) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$= H^{m_1+3,\, n_1 : (m_2,\, n_2); (m_3,\, n_3)}_{p_1+2,\, q_1+3 : [p_2,\, q_2]; [p_3,\, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (c; \lambda_1, \lambda_2), \\ (a+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), (c+1; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (d+\gamma; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$- Z H^{m_1+3,\, n_1 : (m_2,\, n_2); (m_3,\, n_3)}_{p_1+2,\, q_1+3 : [p_2,\, q_2]; [p_3,\, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (c; \lambda_1, \lambda_2), \\ (a+\gamma+1; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma+1; \lambda_1, \lambda_2), (c+1; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (d+\gamma+1; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right] \tag{2.4}$$

बशर्ते कि γ अनृण पूर्णांक हैं, a, b, c धन संमिश्र संख्याएँ हैं, λ_1, λ_2 धन वास्तविक संख्याएँ हैं, $|\arg(x)| < \frac{1}{2} A\pi$, $|arg(y)| < \frac{1}{2} B\pi$, $\text{Re}(a+r-\lambda_1 P-\lambda_2 Q) > 0$, $\text{Re}(b+r-\lambda_1 P-\lambda_2 Q) > 0$, $\text{Re}(c+1-\lambda_1 P-\lambda_2 Q) > 0$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(a-b+2)_r} \times H^{m_1+2,\, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), \\ (a+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (a-b+2+\gamma; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a-b+2)}{2^a} \times H^{m_1+2,\, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+3 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), \\ (a; \lambda_1, \lambda_2), (b-1; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \left(\frac{a}{2}; \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\right) : ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})), \left(\frac{2b-a-1}{2}, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\right) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

(2.5)

$$- H^{m_1+2,\, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+3 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), \\ (a; \lambda_1, \lambda_2), (b-1; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \left(\frac{a+1}{2}; \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\right) : ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})), \left(\frac{2-a+2b}{2}, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\right) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}; F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

(2.5)

बशर्ते कि γ अनृण पूर्णांक हैं, a, b, c धन संमिश्र संख्याएँ हैं, λ_1, λ_2 धन वास्तविक संख्याएँ हैं, $|\arg(x)| < \frac{1}{2} a\pi$, $|\arg(y)| < \frac{1}{2} B\pi$, $\text{Re}(a-b+2) > 0$, $\text{Re}(a - \lambda_1 P - \lambda_2 Q) > 0$, $\text{Re}(b - 1 - \lambda_1 P - \lambda_2 Q) > 0$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} \times H^{m_1+2, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (a+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), \\ y & ((a+b+2\gamma+2)/2; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ & ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array} \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{(a-b)} \times \left\{ H^{m_1+2, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+2, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (a; \lambda_1, \lambda_2), (b; \lambda_1, \lambda_2), \\ y & \left(\frac{a}{2}; \lambda_1, \lambda_2\right)\left(\frac{b+1}{2}; \lambda_1, \lambda_2\right) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ & ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array} \right] \right.$$

$$\left. - H^{m_1+2, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+2, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (a; \lambda_1, \lambda_2), (b; \lambda_1, \lambda_2), \\ y & \left(\frac{a+1}{2}; \lambda_1, \lambda_2\right)\left(\frac{b}{2}; \lambda_1, \lambda_2\right) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ & ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array} \right] \right\} \quad (2.6)$$

बशर्ते कि प्रतिबन्ध (2.5) के से ही हों ।

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2)_r} \times H^{m_1+2, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (a+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), \\ y & (c+\gamma; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) : ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ & ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \times H^{m_1+2,\, n_1+1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a+b-c; \lambda_1, \lambda_2), \\ (a-1; \lambda_1, \lambda_2), (b-1; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$- H^{m_1+2,\, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), \\ (a-1; \lambda_1, \lambda_2), (b-1; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (c-1; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right] \tag{2.7}$$

बशर्ते कि γ अनृण पूर्णांक हैं, a, b, c धन संमिश्र संख्याएँ हैं, λ_1, λ_2 धन वास्तविक संख्याएँ हैं,$|\arg(y)| < \frac{1}{2} B\pi$, $\mathrm{Re}(a-1-\lambda_1 P - \lambda_2 Q) > 0$, व $\mathrm{Re}(b-1-\lambda_1 P - \lambda_2 Q) > 0$, $\mathrm{Re}(a+b-c-\lambda_1 P - \lambda_2 Q) > 0$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3)_r} \times H^{m_1+2,\, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), \\ (a+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), (b+\gamma; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (c+\gamma; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \times H^{m_1+2,\, n_1+1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a+b-c-1; \lambda_1, \lambda_2), \\ (a-2; \lambda_1, \lambda_2), (b-2; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$-H^{m_1+2,\, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]}\left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), \\ y & (a-2; \lambda_1, \lambda_2), (b-2; \lambda_1, \lambda_2), \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} (c-2; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array}\right]$$

$$-2H^{m_1+2,\, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1,\, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]}\left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), \\ y & (a-1; \lambda_1, \lambda_2), (b-1; \lambda_1, \lambda_2), \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} (c-1; \lambda_1, \lambda_2) : ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array}\right] \qquad (2.8)$$

बशर्ते कि γ अनृण पूर्णांक हैं, a, b, c धन संमिश्र संख्याएँ हैं, λ_1, λ_2 धन वास्तविक संख्याएँ हैं, $|\arg(x)| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg(y)| \frac{1}{2}B\pi$, $\text{Re}(a-2-\lambda_1 P - \lambda_2 Q) > 0$, $\text{Re}(b-2-\lambda_1 P - \lambda_2 Q) > 0$, $\text{Re}(a+b-c-1-\lambda_1 P - \lambda_2 Q) > 0$.

(2.1) की उपपत्ति : बाम पक्ष में संकलन $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!}$ को लेने, H-फलन को (1.1) के रूप में व्यक्त करने तथा संकलन एवं समाकलन के क्रम को परस्पर बदलने से जो कि कथित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है (1.2) सम्बन्ध का उपयोग करने तथा अन्त में पुनः परिभाषा (1.1) का सम्प्रयोग करने पर हमें दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

(2.2) से लेकर (2.4) तक के अन्य सम्बन्धों को क्रमशः (1.3) से लेकर (1.5) का उपयोग करके इसी प्रकार से सिद्ध किया जाता है।

(2.5) की उपपत्ति : वामपक्ष में H-फलन को (1.1) के रूप में व्यक्त करने, संकलन एवं समाकलन के क्रम को परस्पर बदलने जो कि कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, सम्बन्ध (1.6) का उपयोग करने तथा अन्त में पुनः परिभाषा (1.1) का सम्प्रयोग करने पर हमें दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

(2.5) की ही तरह अग्रसर होने पर (2.6) से लेकर (2.8) तक के अन्य सम्बन्धों को (1.7) से लेकर (1.9) तक के सम्बन्धों का उपयोग करते हुए सिद्ध किया जा सकता है।

सम्प्रयोग

(2.1) से लेकर (2.8) तक के हमारे सम्बन्धों का महत्व उनकी अनेकशः सार्विकृता है। दो चरों वाले सर्वीकृत H-फलन में विभिन्न प्राचलों तथा चरों के विशिष्टकरण से हमें अनेक परिणाम मिलते हैं जिन्हें के तथा दो चरों वाले E, F, G तथा H-फलन के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, एच० एस० पी० : Indore University Research J. Sci., 1976, 5(1-2), 87-93.
2. श्रीवास्तव, एच० एस० पी० : वही, 1978, 5(1-2), 98-105.
3. श्रीवास्तव, एच० एम०, गोयल, एस० पी० तथा अग्रवाल, आर० के०, : Bull Inst. Math. Acad. Sinca, 1981, 9, 261-277.
4. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी० : H-function of one and two variables with Applications, साउथ एशिया पब्लिकेशन नई दिल्ली 1982.
5. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा, आर० : J. Reine Angew, Math, 1976, 283/284, 265-279.
6. वही : J. Reine Angew, Math, 1976, 283/284, 265-279.
7. वही : Commet. Math. Univ. St. Paul. 1975, 24 (2), 119-137.
8. वही : Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A81=Indag Maths 1978, 40,118-131, 132-144.
9. वही : A82 = Indag Math. 1979, 41, 353-362.
10. कुलश्रेष्ठ, एस० के० : Proc. Nat. Acad. Sci. India,1967, 37, 13-16.
11. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के० : Generalized Hypergeometric functions with applications in Statistics and Physical Sciences, स्प्रिंगर-वरलाग, न्यूयार्क, 1972.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के दीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती
संस्थापक सम्पादक

Swami Satya Prakash Saraswati
Founder Editor

डॉ० चन्द्रिका प्रसाद
प्रधान सम्पादक

Dr. Chandrika Prasad
Chief Editor

डॉ० शिव गोपाल मिश्र
प्रबन्ध सम्पादक

Dr. Sheo Gopal Misra
Managing Editor

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 60 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 15 or 3£ or $ 10

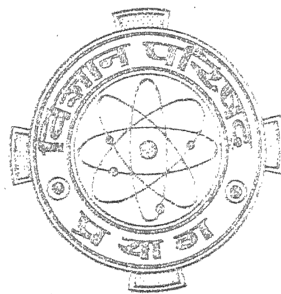
प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

Vol. 40 October 1997 No. 4



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा [illegible]
एवं इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली से आंशिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

विषय-सूची

Vol. 40 October 1997 No. 4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October 1997.

A-फलन तथा उष्मा चालन

सुभाष यादव

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (राज०)

[प्राप्त-जून 5, 1993]

सारांश

गौतम तथा गोयल[1] के A-फलन को प्रयुक्त करते हुए उष्मा चालन का आंशिक अवकल समीकरण हल किया गया है। A-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा तमाम ज्ञात तथा अज्ञात परिणाम व्युत्पन्न किये गये हैं।

Abstract

***A*-function and the heat conduction.** *By* Subhash Yadav, Department of Mathematics, Univesity of Rajasthan, Jaipur (Raj.).

Partial differential equation of heat conduction has been solved using the *A*-function due to Gautam and Goyal[1]. A large number of known and unknown results have been derived by specializing the parameters of the A-function.

1. प्रस्तावना

गौतम तथा गोयल के A-फलन[1] रैंच परिवर्तनों सहित निम्नवत् लिखा जा सकता है-

$$A(x) \equiv A_{p,\,q}^{m,\,n}\left[x \left| \begin{matrix} ((a_p,\ \alpha_p)) \\ \\ ((b_q,\ \beta_q)) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \phi(s)\, x^s \, ds \qquad (1.1)$$

जहाँ

$$\phi(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + \alpha_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - b_j - B_j s)}{\prod_{j=m+1}^{p} \Gamma(1 - a_j - \alpha_j s) \prod_{j=n+1}^{q} \Gamma(b_j + B_j s)} \tag{1.2}$$

जहाँ

(a) रिक्त गुणनफल अर्थात् $(\prod_{j}^{m}, m < j)$ को इकाई माना जाता है।

(b) $x (\neq 0)$ तथा अन्य प्राचल a_j, α_j, b_j, B_j सभी मिश्रित हैं

(c) m, n, p, q अनृण पूर्णांक संख्याएँ हैं जिनमें $m \leq p, n \leq q$;

(d) $((a_p, \alpha_p)) \equiv (a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)$

(e) $i = \sqrt{-1}$ तथा समाकलन का पथ L सरल रेखा है जो लूपों से युक्त काल्पनिक अक्ष के समान्तर है जिससे आवश्यकता हो तो आश्वस्त हुआ जा सके कि $\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + \alpha_j s)$ के पोल इसके बाई ओर तथा $\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - b_j - B_j s)$ के पोल इसके दाहिनी ओर पड़ें।

(1.1) के दाहिनी ओर का समाकल अभिसारी होता है और निम्नलिखित प्रतिबन्धों के सेटों में से किसी एक के द्वारा निर्धारित क्षेत्र (domain) को प्रदर्शित करता है।

(i) $x \neq 0, \xi = 0, n > 0, |\arg(\zeta x)| < \frac{1}{2} \pi n$ (1.3)

(ii) $x > 0, \xi = 0 = n, \upsilon - \sigma\lambda < -1$ (1.4)

जहाँ

$$\xi = I\left(\sum_{1}^{p} \alpha_j - \sum_{1}^{q} \beta_j\right), \eta = R\left(\sum_{1}^{m} \alpha_j - \sum_{m+1}^{p} \alpha_j + \sum_{1}^{n} \beta_j - \sum_{n+1}^{q} \beta\right) \tag{1.5}$$

$$\zeta = \prod_{1}^{p} a_j^{\alpha_j} \prod_{1}^{q} \beta_j^{-\beta_j}, \upsilon = R\left(\sum_{i}^{p} a_j - \sum_{1}^{q} b_j\right) - \frac{1}{2}(p - q) \tag{1.6}$$

$$A = R\left(-\sum_{1}^{p} \alpha_j + \sum_{1}^{q} \beta_j\right)$$

तथा पथ L पर $s = \nu + it$ जब $|t| \to \infty$

किसी दंड में उष्मा चालन का समीकरण चर्चिल ने[2] निम्नवत् दिया है-

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{1.7}$$

जहाँ b एक अचर है जो इस प्रतिबन्ध के अधीन है कि उष्मीय गुणांक अचर है। हम $u(x, t)$ के विभिन्न सेटों पर विचार करके (1.7) का हल प्राप्त करेंगे।

2. संकेतन तथा ज्ञात परिणाम

निम्नलिखित संकेतनों तथा ज्ञात परिणामों का उपयोग निर्मेय के हल तथा उपपत्ति में किया जावेगा।

(i) $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} p_u^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1}\Gamma(\rho+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\rho+\sigma+2)}\;{}_3F_2(-u, \alpha+\beta+u+1, \rho+1 : \alpha+1, \rho+\sigma+2 : 1) \tag{2.1}$$

जहाँ

$$\text{Re}\,\rho > -1,\ \text{Re}\,\sigma > -1$$

(ii) $$\int_{1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} p_u^{(\alpha,\beta)}(x)\,p_v^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$

$$= \frac{2^{1+\alpha+\beta}\Gamma(u+\alpha+1)\Gamma(u+\beta+1)}{(2u+\alpha+\beta+1)\,u\,!\,\Gamma(u+\alpha+\beta+1)}\,\delta_{uv} \tag{2.2}$$

जहाँ

$$\text{Re}(\alpha) > -1,\ \text{Re}(\beta) > -1$$

(iii) $$J_w(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{w+2k}}{k\,!\,\Gamma(w+k+1)} \tag{2.3}$$

(iv) $$L_w(z) = \sum_{k=0}^{w}\frac{(-1)^k\, w\,!}{(k\,!)^2 (w+k)\,!}\,z^k \tag{2.4}$$

3. निर्मेय का हल

(A) माना कि

$$u(x, 0) = e^{-(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\lambda}} A_{p,q}^{m,n}\left[z(1-x)^{h}(1+x)^{l} \left| \begin{matrix} ((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q)) \end{matrix} \right. \right] \tag{3.1}$$

तो हल $u(x, t)$ को निम्नवत् लिखा जा सकता है-

$$u(x, t) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v \exp\{-b(v+1)t\} p_v^{(\alpha, \beta)}(x) \tag{3.2}$$

अब यदि $t = 0$, तो

$$u(x, 0) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v\, p_v^{(\alpha, \beta)}(x) \tag{3.3}$$

यह प्रसार वैध है क्योंकि $u(X, 0)$ संतत है तथा अन्तराल (-1, 1) में परिबद्ध विचरण वाला है। अब दोनों पक्षों में $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} p_u^{(\alpha,\beta)}(x)$ से गुणा करने तथा -1 से लेकर +1 के बीच समाकलन करने पर (3.3) का वाम पक्ष प्राप्त होता है-

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} e^{-(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\lambda}} p_u^{(\alpha, \beta)}(x)$$

$$\times A_{p,q}^{m,n}\left[z(1-x)^{h}(1+x)^{l} \left| \begin{matrix} ((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q)) \end{matrix} \right. \right] dx$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{!k} 2^{(\sigma+\lambda)k} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-u)_r (\alpha+\beta+u+1)_r}{r!(\alpha+1)_r}$$

$$A_{p+2,q+1}^{m+2,n}\left[2^{h+l} z \left| \begin{matrix} (1+\alpha+r+\sigma k, h), (1+\beta+\lambda k, l), ((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q)), (2+\alpha+\beta+\sigma k+\lambda k+r, h+l) \end{matrix} \right. \right] \tag{3.4}$$

इसके साथ ही (3.3) का दक्षिण पक्ष भी

$$C_v \frac{2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(u+\alpha+1)\,\Gamma(u+\beta+1)}{(2u+\alpha+\beta+1)\,u\,!\,\Gamma(u+\alpha+\beta+\lambda+1)} \tag{3.5}$$

है जहाँ

(i) (3.4) के दोनों पक्षों में आये A-फलन (1.3) के ही समान वैश्लेषिकता के प्रतिबन्धों को तुष्ट करते हैं।

(ii) h, l घनात्मक हैं।

(iii) $\mathrm{Re}\,(\alpha+1)>0, \mathrm{Re}\,(\beta+1)>0, \mathrm{Re}\,(\alpha+\sigma k+h\,\nu+1)>0$

(iii) $0, \mathrm{Re}\,(\beta+1)\ 0, \mathrm{Re}\,(\alpha+\sigma k+h\,\nu+1)\ 0$ एवं $\mathrm{Re}\,(\beta+\lambda k+h\,\nu+1)$

अतः (3.4) तथा (3.5) से हमें निम्न की प्राप्ति होती है-

$$C_u = \frac{(2u+\alpha+\beta+1)\;u\,!\;\Gamma(u+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(u+\alpha+1)\;\Gamma(u+\beta+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!}\,2^{(\sigma+\lambda)k} \sum_{r=0}^{0} \frac{(-u)_r\,(\alpha+\beta+u+1)_r}{r\,!\,(\alpha+1)_r}$$

$$A^{m+2,\,n}_{p+2,\,q+1}\left[\,2^{h+l}z \left| \begin{matrix} (1+\alpha+r+\sigma k,\,h),\,(1+\beta+\lambda k,\,l),\,((a_p,\,\alpha_p)) \\ ((b_q,\,\beta_q)),\,(2+\alpha+\beta+\sigma k+\lambda k+r,\,h+l) \end{matrix} \right.\right] \tag{3.6}$$

इसलिए

$$u(x,t) = \sum_{u=0}^{\infty} C_u\ \exp\ \{-b\,u\,(u+1)t\}\ p_u^{(\alpha,\,\beta)}\,(x) \tag{3.7}$$

जहाँ C_u को (3.6) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(B) इस दशा में यदि

$$u(x,0) \equiv J_w\left[\,(1-x)^{\sigma}\,(1+x)^{\lambda}\,\right] A^{m,\,n}_{p,\,q}\left[\,z(1-x)^h\,(1+x)^l \left| \begin{matrix} ((a_p,\,\alpha_p)) \\ ((b_q,\,\beta_q)) \end{matrix} \right.\right]$$

तब निर्मेय का हल निम्न के द्वारा दिया जाता है।

$$u(x, t) = \sum_{u=0}^{\infty} C_u \exp\{-b\,u\,(u+1)t\}\; p_u^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.9}$$

जहाँ

$$C_u = \frac{2^{(\sigma+\lambda-1)w}(2u+\alpha+\beta+1)\,u\,!\,\Gamma(u+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(u+\alpha+1)\,\Gamma(u+\beta+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!} \frac{2^{2k(\sigma+\lambda-1)}}{\Gamma(w+k+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-u)_r\,(\alpha+\beta+u+1)_r}{r\,!\,(\alpha+1)_r}$$

$$.\,A_{p+2,\,q+1}^{m+2,\,n}\left[2^{h+l}z \left| \begin{matrix} (1+\alpha+\sigma w+2\sigma k+r,\,h),\,(1+\beta+\lambda w+2\lambda k,\,l),\,((a_p,\,\alpha_p)) \\ ((b_q,\,\beta_q)),\,(\alpha+\beta+\sigma w+\lambda w+2\sigma k+2\lambda k+2+r,\,h+l) \end{matrix} \right. \right] \tag{3.10}$$

बशर्ते

(i) (3.8) तथा (3.10) में आये A-फलन (1.3) में दिये गये फलनों की तरह वैश्लेषिकता के प्रतिबन्धों की तुष्टि करते हों

(ii) h, l घनात्मक हों।

(iii) $\mathrm{Re}(\alpha+1)>0$, $\mathrm{Re}(\beta+1)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha+\sigma w+2\sigma k+h\,v+1)>0$, एव $\mathrm{Re}(\beta+\lambda w+2\lambda k+l\,v+1)>0$.

(C) यदि

$$u(X,\,0) = L_w\left[(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\lambda}\right] A_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z(1-x)^h(1+x)^l \left| \begin{matrix} ((a_p,\,\alpha_p)) \\ ((b_q,\,\beta_q)) \end{matrix} \right. \right] \tag{3.11}$$

तब निर्मेय का हल निम्न के द्वारा दिया जाता है

$$u(x, t) = \sum_{u=0}^{\infty} C_u \exp\{-b\,u\,(u+1)t\}\; p_u^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.12}$$

जहाँ

$$C_u = \frac{(2u + \alpha + \beta + 1)\, u!\, \Gamma(\alpha + \beta + 1 + u)}{\Gamma(u + \alpha + 1)\, \Gamma(u + \beta + 1)}$$

$$\sum_{k=0}^{w} \frac{(-1)^k\, w!}{(k!)^2 (w-k)!}\, 2^{(\sigma+\lambda)k} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-u)_r\, (\alpha+\beta+u+1)_r}{r!\, (\alpha+1)_r}$$

$$A^{m+2,n}_{p+2,q+1}\left[2^{h+l} z \left| \begin{matrix} (1+\alpha+\sigma k+r, h), (1+\beta+\lambda k, l), ((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q)), (\alpha+\beta+\sigma k+\lambda k+2+r, h+l) \end{matrix} \right. \right]$$

(3.13)

बशर्ते कि

(i) (3.11) तथा (3.13) में आये A-फलन के समान वैश्लेषिकता के प्रतिबन्ध की तुष्टि करते हों।

(ii) h, l घनात्मक हों।

(iii) $\text{Re}\,(\alpha + 1) > 0$, $\text{Re}\,(\beta + 1) > 0$, $\text{Re}\,(\alpha + \sigma k + h\nu + 1) > 0$ तथा $\text{Re}\,(\beta + \lambda k + l\nu + 1) > 0$.

(D) यदि

$$u(X, 0) = A^{m,n}_{p,q}\left[z(1-x)^h (1+x)^l \left| \begin{matrix} ((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q)) \end{matrix} \right. \right] \qquad (3.14)$$

तब निर्मेय का हल निम्न के द्वारा दिया जाता है

$$u(x, t) = \sum_{u=0}^{\infty} C_u \exp\{-b\,u\,(u+1)t\}\, p_u^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad (3.15)$$

जहां

$$C_u = \frac{(2u + \alpha + \beta + 1)\, u!\, \Gamma(u+\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(u + \alpha + 1)\, \Gamma(u + \beta + 1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-u)_r\, (\alpha+\beta+u+1)_r}{r!\, (\alpha+1)_r}$$

$$A^{m+2,n}_{p+2,q+1}\left[2^{h+l} z \left| \begin{matrix} (1+r+\alpha, h), (1+\beta, l), ((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q)), (\alpha+\beta+2+r, h+l) \end{matrix} \right. \right] \qquad (3.16)$$

बशर्ते कि

(i) (3.14) तथा (3.16) में आये A-फलन (3.1) के समान वैश्लेषिकता के प्रतिबन्ध की तुष्टि करते हों।

(ii) h, l घनात्मक हों।

(iii) $\text{Re}(\alpha+1)>0$, $\text{Re}(\beta+1)>0$, $\text{Re}(\alpha+h\nu+1)>0$, तथा $\text{Re}(\beta+l\nu+1)>0$.

4. विशिष्ट दशाएँ

चूँकि A फलन में फाक्स का ज-फलन विशिष्ट दशा के रूप में निम्नलिखित सम्बन्ध के कारण रहता है।

$$A_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}((1-a_p,\alpha_p))\\((1-b_q,\beta_q))\end{matrix}\right.\right]=H_{p,q}^{n,m}\left[x\left|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q))\end{matrix}\right.\right]$$

जहाँ $\alpha_j\,(1\le j\le p)$ तथा $\beta_j\,(1\le j\le q)$ असली धनात्मक हैं जिनमें वशिष्ट दशा के रूप में G-फलन रहता है। एडेल्यी[3] द्वारा दिये गये G-फलन की विशिष्ट दशाओं को प्रयुक्त करके हम विभिन्न विशिष्ट फलनों के तमाम ज्ञात तथा अज्ञात हल प्राप्त कर सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रोफेसर ए० एन० गोयल का कृतज्ञ है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया है।

निर्देश

1. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन० : Revista Mathematica, Tucuman, 1980.
2. चर्चिल, आर० वी० : Fourier Series and Boundary value Problems. मैकग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क 1947
3. एर्डेल्यी, ए० : H. T. F. Vols. I & II, मैकग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क 1947

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October, 1997.

कैडमियम और कैल्सियम की अन्योन्य क्रिया का अध्ययन

शिवगोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त-जनवरी 5, 1997]

सारांश

पौधों तथा मिट्टी पर भारी धातुओं के सम्भावित हानिकारक प्रभाव को कम करने के उद्देश्य से कैडमियम और कैल्सियम के बीच अन्योन्य क्रिया का अध्ययन किया गया। इसके लिये पालक तथा मेंथी को सूचक फसलों के रूप में चुना गया और 45 दिन के बाद बायोमास ज्ञात किया गया।

यह पाया गया कि अकेले कैडमियम की उपस्थिति में पालक तथा मेंथी दोनों फसलों की उपज कम हुई जबकि कैडमियम तथा कैल्सियम दोनों को साथ-साथ प्रयोग करने पर दोनों फसलों की उपज अधिक प्राप्त हुई। अकेले कैडमियम डालने पर पालक तथा मेंथी के तनों (पत्ती सहित) और जड़ों में कैडमियम की सान्द्रता अधिक पाई गई। कैडमियम तथा कैल्सियम दोनों को साथ-साथ प्रयोग करने पर कैडमियम की सान्द्रता घट गई।

Abstract

Interaction between cadmium and calcium. *By* S.G. Misra and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

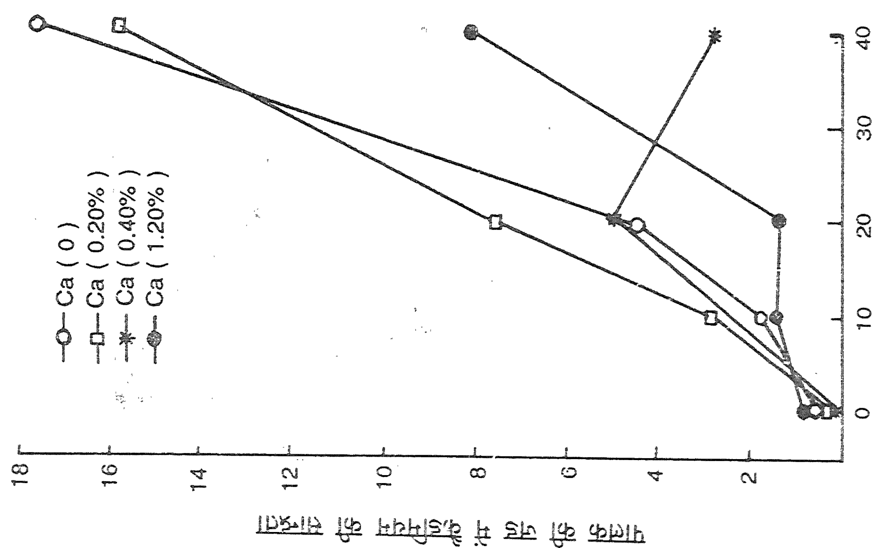
To mitigate the possible adverse effect of heavy metals on soils and plants, interaction between cadmium and calcium was studied. Two vegetable crops-spinach and fenugreek were grown as test crops, Total biomass was determined after 45 days of growth. It was observed that cadmium alone reduced the yield of both the crops but when used with calcium it enhanced the yield of both the crops. The concentration of cadmium in shoots and roots of the spinach and fenugreek crops was more in Cd-treated pots than is CdxCa treated pots.

मिट्टी एवं जल प्रदूषण के सन्दर्भ में भारी धातुयें आजकल चर्चा का विषय बनी हुई हैं। पौधों के अंकुरण, बढ़वार तथा उपज पर इन भारी धातुओं यथा कैडमियम, क्रोमियम, लेड इत्यादि का हानिकारक प्रभाव पड़ता है। [1, 2] पौधों द्वारा कैडमियम तथा लेड के अवशोषण से फसल की उपज एवं उसकी गुणवत्ता पर प्रभाव पड़ता है। [3] भारी धातुयें आपस में तथा अन्य पोषक तत्वों के साथ प्रतिरोधी (Antagonistic) तथा योगवाही (Synergistic) अन्योन्य क्रिया करती हैं। [4] किन्तु अभी इस दिशा में कोई कार्य नहीं हुआ फलतः हमने मिट्टी में कैडमियम तथा कैल्सियम के मध्य अन्योन्य क्रिया का पत्तीदार हरी सब्जियों पर सम्भावित प्रभाव जानने के उद्देश्य से विस्तृत अध्ययन किया।

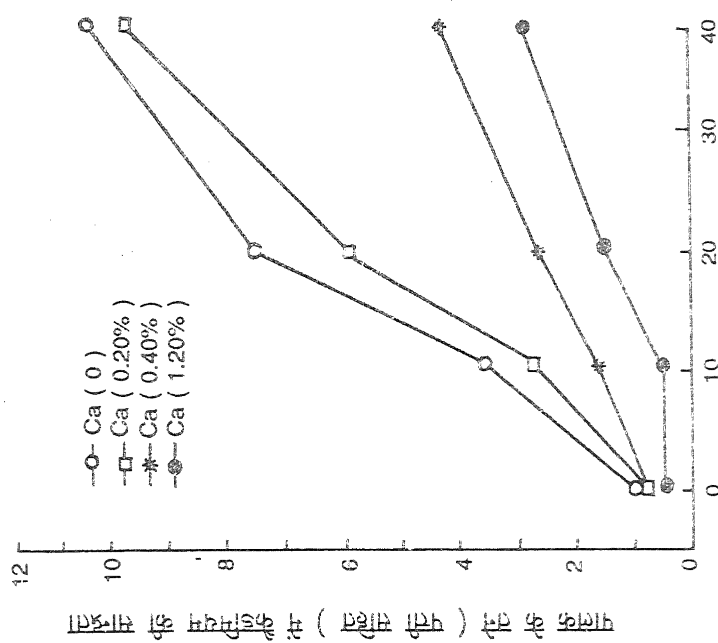
प्रयोगात्मक

हमने शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक फार्म की मिट्टी का प्रयोग फसलें उगाने के लिये किया। ये प्रयोग मिट्टी के गमलों में किये गये। मिट्टी के भौतिक एवं रासायनिक गुणधर्म इस प्रकार थे

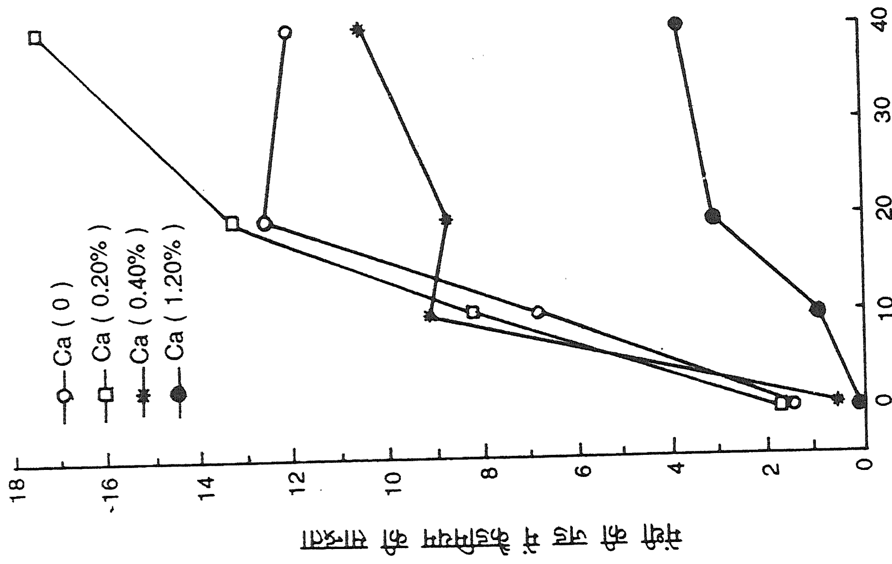
क्ले	34.8%
धनायन विनिमय क्षमता	19.8 Cmol (P^+) kg^{-1}
आर्गेनिक कार्बन	0.52%
डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित कैडमियम	0.30 पी० पी० एम०
पी० एच०	7.5
कणाकार	सिल्टी क्ले लोम



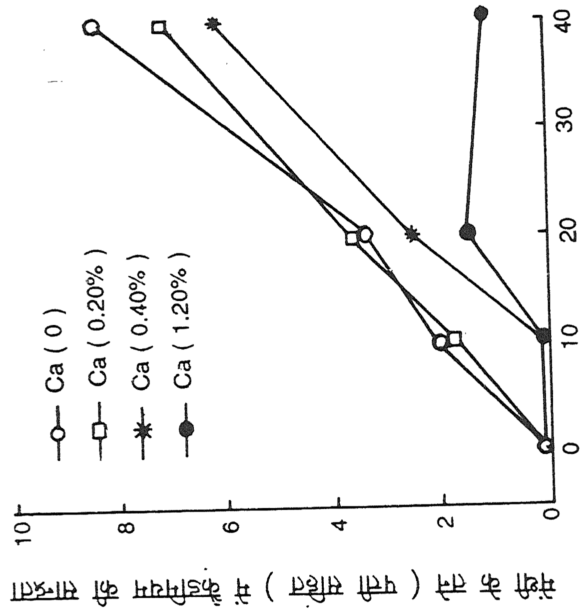
चित्र 2 : कैडमियम से मृदा का उपचार



चित्र 1 : कैडमियम से मृदा का उपचार



चित्र 4 : कैडमियम से मृदा का उपचार



चित्र 3 : कैडमियम से मृदा का उपचार

प्रत्येक गमले में 5 किलोग्राम मिट्टी ली गई और कैल्सियम को कैल्सियम सल्फेट के रूप में 0, 0.20, 0.40 तथा 1.20 प्रतिशत की दर से मिलाया गया। इसी तरह कैडमियम को कैडमियम कार्बोनेट के रूप में 0, 10, 20 तथा 30 मि० ग्रा०/ कि० ग्रा० की दर से प्रयोग किया गया। सभी गमलों में NPK की आवश्यक मात्रा 50-50-50 किग्रा/हे० यूरिया, सिंगल सुपरफास्फेट, म्यूरेट ऑफ पोटाश के रूप में बेसल ड्रेसिंग के द्वारा दी गई। 24 घंटे बाद बीज की बुवाई की गयी। 5-6 दिन के अन्तराल पर सिंचाई की गई। 45 दिन बाद फसल उखाड़ ली गई।

पौधों के तनों (पत्तियों सहित) एवं जड़ों के नमूने ट्राई-एसिड मिश्रण (750 ml conc. HNO_3, 150 ml conc. H_2SO_4 तथा 300 ml. $HClO_4$) में पाचित किये गये तथा इस पचित निष्कर्ष से कैडमियम की सान्द्रता एटॉमिक एब्जार्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर से ज्ञात की गई। परिणाम सारणी 1 व 2 में अंकित हैं।

परिणाम तथा विवेचना

कैडमियम तथा कैल्सियम की विभिन्न मात्राओं के प्रयोग से पालक और मेंथी के बायोमास से सम्बन्धित परिणाम सारणी 1 व 2 में दिये गये हैं। कैडमियम के अकेले प्रयोग से पालक और मेंथी का बायोमास भार कम प्राप्त हुआ। कैल्सियम के अकेले प्रयोग से बायोमास भार में वृद्धि हुई किन्तु यह भार नियन्त्रण की तुलना में कम थी। 1.20% कैल्सियम की मात्रा कैडमियम की सारी मात्राओं (10, 20 तथा 40 मि ग्रा/ कि० ग्रा०) के साथ बायोमास भार वृद्धि में सहायक सिद्ध हुई। कैल्सियम की कम मात्रायें 0.20 व 0.40% कैडमियम की विभिन्न मात्राओं के साथ प्रयोग करने पर बायोमास भार पर कोई विशेष प्रभाव दिखाई नहीं दिया।

कैडमियम का सान्द्रण

कैडमियम की बढ़ती मात्रा के साथ तने (पत्तियों सहित) में कैडमियम के सान्द्रण में वृद्धि दिखाई दी। पौधों के ऊतकों में कैडमियम की अधिक मात्रा मिट्टी में कैडमियम की अधिक उपलब्धता के कारण सम्भव है। जब कैडमियम को कैल्सियम के साथ प्रयोग किया गया तो पौधों में कैडमियम की सान्द्रता में कमी पाई गई। यह कमी कैल्सियम की 1.20% मात्रा पर सबसे कम पाई गई।

समस्त उपचारों में पौधों की जड़ों में संचित कैडमियम की मात्रा तनों की तुलना में अधिक पाई गई।

डहिया[5] आदि ने भी मक्का की उपज पर कैडमियम का हानिकारक प्रभाव देखा है।

कैडमियम तथा कैल्सियम की संयोजकता समान होने के कारण सम्भवतया यह अन्योन्य क्रिया योगवाही रूप में कैडमियम के अवशोषण में कमी लाती है। मिट्टी में पहले से उपस्थित कार्बनिक पदार्थ की अधिक मात्रा इस अन्योन्य क्रिया को उत्प्रेरित करने में सहायता करती है। इस तरह कैडमियम की विषक्तता को कम किया जा सकता है।

सारणी 1

कैडमियम × कैल्सियम की अन्योन्य क्रिया का पालक की उपज (शुष्क पदार्थ) तथा तनों व जड़ों में कैडमियम की सान्द्रता पर प्रभाव

कैडमियम की दर (मिग्रा./किग्रा.)	कैल्सियम स्त्रोत	कैल्सियम की दर प्रतिशत	उपज ग्राम/गमला	कैडमियम की सान्द्रता (मिग्रा./किग्रा.) तना पत्ती सहित	जड़
0	कैल्सियम सल्फेट	0	650	1.00	0.60
		0.20	650	0.80	0.30
		0.40	600	0.90	0.20
		1.20	800	0.50	0.80
10	कैल्सियम सल्फेट	0	400	3.60	1.80
		0.20	350	2.80	2.90
		0.40	450	1.60	1.80
		1.20	750	0.50	1.50
20	कैल्सियम सल्फेट	0	200	7.40	4.40
		0.20	250	5.80	7.50
		0.40	350	2.60	4.90
		1.20	800	1.60	1.40
40	कैल्सियम सल्फेट	0	200	10.40	17.50
		0.20	250	9.80	15.80
		0.40	250	4.30	2.90
		1.20	600	3.00	8.00

सारणी 2

कैडमियम × कैल्सियम की अन्योन्य क्रिया का मेंथी की उपज (शुष्क पदार्थ) तथा तनों व जड़ों में कैडमियम की सान्द्रता पर प्रभाव (चित्र 1-4)

कैडमियम की दर (मिग्रा./किग्रा.)	कैल्सियम स्त्रोत	कैल्सियम की दर प्रतिशत	उपज ग्राम/गमला	कैडमियम की सान्द्रता (मिग्रा./किग्रा.) तना पत्ती सहित	जड़
0	कैल्सियम सल्फेट	0	450	0.12	1.5
		0.20	750	0.08	1.7
		0.40	900	0.14	0.56
		1.20	1200	0.08	0.15
10	कैल्सियम सल्फेट	0	550	2.00	6.80
		0.20	500	1.80	8.10
		0.40	900	1.80	8.60
		1.20	1600	0.12	1.00
20	कैल्सियम सल्फेट	0	250	3.4	12.50
		0.20	400	3.6	13.20
		0.40	750	2.6	8.60
		1.20	1200	1.5	3.00
40	कैल्सियम सल्फेट	0	100	8.40	12.00
		0.20	300	7.20	17.40
		0.40	1000	6.20	10.50
		1.20	1200	1.10	3.90

निर्देश

1. जॉन, एम० के, वान लारहोवेन, सी० जे० तथा चाट, एच० एच० : Environ. Sci. Tech., 1972 , 6, 1005-1009.

2. वान स्कारर, के० तथा स्क्रूप, डब्ल्यू०, : Z. Pflanzener nahrung diing Bodenk, 1936, 43, 34-43.

3. जॉन, एम० के० : J. Environ. Pollut. 1976, 11, 85-95

4. हासेट, जे० जे०, मिलर, जे० ई० तथा कापे, डी० ई० : J. Environ. Pollut. 1976, 11, 297-302.

5. डहिया, एस० एस०, गोयल, एस० तथा सिंह, ए० : Proc. of Symposium at Haryana Agricultural University, Hissar, 1984, 115.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October, 1997.

गतिपालक चक्र का जड़त्व-आघूर्ण

सुरेन्द्र नाथ श्रीवास्तव

भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त-जुलाई 2,1996]

सारांश

प्रयोगशाला में गतिपालक चक्र के जड़त्व-आघूर्ण को ज्ञात करने के लिये प्रेक्षण लेना काफी सरल है, परन्तु प्रेक्षणों पर आधारित गणना करना अपेक्षाकृत कुछ कठिन है। इस प्रपत्र में वर्णित नये प्रकार के दो रेखाचित्रों की सहायता से गणना करना अत्यंत सरल हो जाता है। रेखाचित्रों द्वारा प्राप्त दो स्थिरांक भी गतिपालक चक्र के जड़त्व-आघूर्ण की गणना में अत्यंत रोचक तथा महत्व के हैं।

Abstract

Moment of inertia of fly wheel. *By* Surendra Nah Srivastava, Physics Department, Allahabad University, Allahabad.

For the determination of the moment of inertia of a flywheel in the laboratory, the observations are taken quite easily, but calculations based upon the observations are comparatively a little difficult. The calculations are greatly simplified, if done by a new method, with the help of two graphs, described in this article. The Two constants, obtained from the graphs, are of great interest and significance in the calculation of the moment of inertia of the flywheel.

गतिपालक चक्र का जड़त्व घूर्णन ज्ञात करना स्नातकपूर्व कक्षाओं के लिये अत्यन्त शिक्षाप्रद प्रयोग है।[1] सामान्य तथा गतिपालक चक्र एक चक्र के रूप में होता है जिसमें एक लम्बी धुरी उपयुक्त

बयेरिंग पर या तो ऊर्ध्वाधर या क्षैतिज स्थिति में टिकी रहती है। धुरी में एक खूंटी रहती है जिसके एक सिरे पर एक ढीले फन्दे के रूप में डोरा बँधा रहता है। इस डोरे को धुरी के चारों ओर n_1 बार लपेट लिया जाता है। प्रयोग करते समय भार को विश्राम अवस्था से नीचे उतरने दिया जाता है । भार के नीचे जाने पर डोरा धुरी से खुल जाता है और अन्त में डोरे का फन्दा खूँटी से विलग हो जाता है। ज्योंही डोरा खूंटी से विलग होता है घड़ी चालू कर दी जाती है और जब गतिपालक चक्र रुकता है तो घड़ी को बन्द कर देते हैं। इस तरह गतिपालक चक्र का वह काल प्राप्त होता है जिसमें डोरा के फन्दा छोड़ने से लेकर चक्र रुकने तक सम्मिलित है। इस काल में गतिपालक जितने चक्रण करता है उसे भी लिखते जाते हैं। n_1 के विभिन्न मानों के लिये कई प्रेक्षण किये जाते हैं। इसी तरह भार के विभिन्न मानों के लिये प्रेक्षण किये जाते हैं।

सिद्धान्त

भार की स्थितिज ऊर्जा का इस्तेमाल ऊँचाई h से नीचे आने में तीन प्रकार से होता है-

(1) गतिपालक चक्र को गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}Iw^2$ प्रदान करने में, जहाँ w गतिपालक चक्र का कोणीय वेग है उस क्षण का जब डोरे का फन्द T खूँटी से विलग होता है।

(2) बेयरिंग पर घर्षण के कारण ऊर्जा क्षति $n_1 f$ को जीतने में, जहाँ प्रतिचक्रण पर ऊर्जा क्षति f है और

(3) उस क्षण भार द्वारा अर्जित गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ प्रदान करने में, जब वह धुरी से विलग होता है। इस तरह

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}I\,w^2 + n_1 f + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

इस व्यंजक को $\frac{1}{2}w^2$ को की तुलना में $\frac{1}{2}mv^2$ पद की उपेक्षा करते हुए सरल किया जा सकता है। तब समीकरण का सरल रूप

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}I\,w^2 + n_1 f \qquad (2)$$

हो जाता है जिसमें w वह कोणीय वेग है जिस क्षण डोरा खूँटी को छोड़ता है। तत्पशचात् कोणीय वेग लगातार घटकर t काल के बाद शून्य हो जाता है और इस काल में यह n_2 चक्रण लगा लेता है। यह कोणीय वेग w माध्य कोणीय वेग $w^- = 2\pi n^2/t$ का दूना होगा। अतः

$$w = \frac{4\pi n_2}{t} \qquad (3)$$

गतिपालक चक्र की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2} I w^2$ का उपयोग चक्र द्वारा n_2 परिक्रमण लगाने में किया जाता है।

$$\therefore \quad \frac{1}{2} I w^2 = n_2 f \tag{4}$$

समीकरण (2) तथा (4) से f को निकाल देने पर

$$m g h = \frac{1}{2} I w^2 \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) \tag{5}$$

समीकरण (5) में समीकरण (3) से w का मान रखने पर

$$m g h = \frac{8 \pi^2 n^2}{t^2} \cdot I \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right)$$

$$\therefore \quad I = \frac{\text{mgh}\, t^2}{8 \pi^2 n^2 \left(n_1 + n^2 \right)} \tag{6}$$

तत्पश्चात् समीकरण (6) का प्रयोग गतिपालक चक्र के जड़त्व-आघूर्ण की गणना के लिये पारम्परिक ढंग से किया जाता है।

संशोधित सिद्धान्त

समीकरण (6) में गणनाओं को सरल बनाने के लिये चरों की संख्या कम करने के लिये समीकरण (3) तथा (4) से हम w हटा देते हैं तो

$$\frac{8 \pi^2 n_2^2 I}{t^2} = n_2 f$$

अथवा

$$t^2 = \frac{8 \pi^2 I n_2}{f}$$

अथवा

$$t^2 = T^2 n_2 \tag{7}$$

जहाँ

$$T^2 = \frac{8\pi^2 I}{f} = \text{अचर}$$

T^2 को उस सरल रेखा आरेख के ढाल (slope) से प्राप्त किया जा सकता है जिसे t^2 के विपक्ष n_2 से खींचा जाता है। स्पष्ट है कि यह निर्देशांकों के मूल बिन्दु (origin) से गुजरता है। यदि धुरी की त्रिज्या r हो तो जब गतिपालक चक्र डोरे के निर्मोचन में n_1 घूणन करता है, तो भार h ऊँचाई से नीचे जाता है। अतः

$$h = 2\pi r n_1 \tag{8}$$

अन्त में समीकरण (6) में समीकरण (7) से t^2 का तथा समीकरण (8) से h के मान प्रतिस्थापित करने पर

$$I = \frac{m g r n_1 T^2}{4\pi\left(n_1 + n_2\right)}$$

अथवा

$$m = \frac{4\pi I}{g r T^2} \cdot \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)$$

अथवा

$$m = M\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \tag{9}$$

जहाँ

$$M = \frac{4\pi I}{g r T^2} \tag{10}$$

इस तरह M अन्य अचर है जिसे उस आरेख के ढाल से प्राप्त किया जा सकता है जो m तथा $\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)$ के बीच खींचा जाता है। हमें एक दूसरा सीधी रेखा वाला आरेख प्राप्त होगा जो मूल बिन्दु से होकर गुजरेगा।

हम समीकरण (10) से I का मान ज्ञत कर सकते हैं क्योंकि-

$$I = \frac{M T^2 g r}{4\pi} \tag{11}$$

आरेख से T^2 तथा M इन दोनों के मान ज्ञात होने से समीकरण (11) का उपयोग करते हुए गतिपालक चक्र के जड़त्व को परिगणित करना काफी सरल है।

विधि

भार के पाँच या अधिक भिन्न-भिन्न मानों का उपयोग करते हुए $\frac{n_2}{n_1}$ के लिये प्रेक्षण किये जाते हैं और उपयुक्त आरेख खींचकर M के मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

t^2 एव n_2 के बीच आरेख प्राप्त करने के लिये गतिपालक चक्र को हाथ से घुमाया जा सकता है और उस काल को लिख लिया जाता है जिसमें विश्रामं स्थिति के पूर्व n_2 परिक्रमण पूरे हो लेते हैं। वैकल्पिक रूप में n_2 तथा t को रूढ़ विधि से ज्ञात कर सकते हैं।

T तथा *M* अचरों का महत्व

यदि हम $n_2 = 1$ रखें तो समीकरण (7) से $t = T$ प्राप्त होगा। इसका अर्थ हुआ कि T वह समय है जिसमें गतिपालक चक्र अंतिम पूरा परिक्रमण करता है। t^2 एव n_2 के मध्य रेखीय सम्बन्ध का अर्थ है कि $2T, 3T, 4T, \ldots,$ कालों में गतिपालक चक्र अपने अन्तिम 4, 9, 16, ... परिक्रमण पूरे करता है।

समीकरण (9) से M की महत्ता समझने में सहायता मिलती है। यदि लटकाया हुआ भार M के तुल्य हो तो समीकरण (9) के अनुसार n_2 शून्य के तुल्य होगा। इसका अर्थ हुआ कि गतिपालक चक्र परिक्रमा नहीं करेगा और बियरिंग पर घर्षण शक्ति भार के गुरुत्वीय घर्षण को सन्तुलित कर लेगी। इसे क्रान्तिक भार नाना जा सकता है और लटके भार को M की अपेक्षा अधिक बनाया जा सकता है जिससे गतिपालक चक्र परिक्रमा कर सके और n_2 परिक्रमण कर ले।

रेखिक सम्बन्ध से एक अन्य रोचक परिणाम मिलता है। यदि लटकाये भार को $2M$ के चुल्य मान लिया जाय तो n_1 बराबर होगा n_2 के। इसी तरह यदि m को $3M$, $4M$, $5M$ के तुल्य कर लिया जाय तो n_2 क्रमशः $2n_1$, $3n_1$, $4n_1$ के तुल्य होगा।

इस तरह M को जानकर हम M तथा n_1 को समंजित करके गतिपालक चक्र से वांछित संख्या के परिक्रमण करा सकते हैं।

M सरल रीति से बेयरिंग के घर्षण से सम्बन्धित है। इसे समीकरण (2) तथा (4) को मिला कर प्राप्त किया जा सकता है। तब हमें

$$m g h = \left(n_1 + n_2\right) f \tag{12}$$

प्राप्त होगा और समीकरण (12) में समीकरण (8) से h का मान रखने पर

$$m g 2 \pi r n_1 = \left(n_1 + n_2\right) f \tag{13}$$

समीकरण (9) से m का मान समीकरण (13) में रखने पर

$$M\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) g 2 \pi r n_1 = \left(n_1 + n_2\right) f$$

अथवा

$$f = M g . 2 \pi r \tag{14}$$

यदि डोरे से लटकाया गया भार M है तो गतिपालक चक्र के एक परिक्रमण में $2\pi r$ दूरी होने से इसकी विभव ऊर्जा $M g . 2\pi r$ के तुल्य होगी f के और f ही ऊर्जा क्षति है जो बेयरिंग पर गतिपालक चक्र के प्रत्येक घूर्णन पर घर्षण के कारण होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० वाई० पी० वार्ष्णेय का कृतज्ञ है जिन्होंने यह विचार सुझाया कि समीकरण (6) में आये चर सरल सम्बन्ध द्वारा जुड़े नहीं हैं अतः इसी से यह शोधकार्य हाथ में लिया गया।

निर्देश

1. वर्सनाप, बी-एल० तथा फ्लिंट, एच० टी० : Advanced Practical Physics for Students, मेथेयून लन्दन 1951

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October 1997.

समांगकल्प श्यान स्वगुरुत्वीय सरंध्र माध्यम का स्थायित्व

एच० एस० पी० श्रीवास्तव तथा डी० एस० वाघेला

शासकीय कला एवं विज्ञान महाविद्यालय, रतलाम (म० प्र०)

[प्राप्त- मार्च 1, 1995]

सारांश

समांगकल्प श्यान सरंध्र माध्यम के गुरुत्वीय स्थायित्व की विवेचना की गई है। रेखीकृत चुम्बकद्रवगतिकीय समीकरणों तथा केडेज़ एवं व्रान्जेस की तकनीक का उपयोग कर समांगकल्प के प्रभाव को दर्शाया गया है। यह पाया गया है कि माध्यम की असमांगता संघनन के क्रांतिक तरंगदैर्ध्य को 0.7 गुना घटा कर निकाय को अस्थिर करती है। यदि अस्थायित्व की शर्त सन्तुष्ट न हो तो निकाय उपगामितः स्थाई रहता है। माध्यम की श्यानता एवं सरंध्रता अस्थायित्व वृद्धि दर को घटाते हैं।

Abstract

Stability of a Quasi-homogeneous viscous self-gravitating porous medium. *By* H. S. P. Shrivastava and D. S. Vaghela, Govt. Arts and Science College, Ratlam (M.P.)

The gravitational stability of a Quasi-homogeneous viscous, porous medium is discussed. Using linearized M.H.D. equations and applying the technique of Cadez and Vranjes the effect of Quasi-homogeneity is accounted for. It is found that the inhomogeneity of the medium destabilizes the system by reducing the critical wavelength of condensation by a factor of 0.7. The system remains asymptotically stable if the condition of instability is not satisfied. The viscosity and porosity of the medium reduces the growth rate of the instability.

1. प्रस्तावना

अन्तरातारकीय बादलों की गुरुत्वीय अस्थिरता के कारण तारों के निर्माण का सिद्धान्त सूत्र सर्वप्रथम जीन्स[3] ने दिया था। रोहल्स[4] तथा केडेज[1] ने दर्शाया है कि अन्तरातारकीय माध्यम की भौतिक अवस्था समांगीय नहीं मानी जा सकती है। इधर व्रान्जेस [10] ने समांगकल्प प्लाज्मा बादलों की गुरुत्वीय अस्थिरता की विवेचना की है। छजलानी तथा संघवी,[2] एवं श्रीवास्तव तथा वाघेला[5-9] ने समांगी माध्यम की गरुत्वीय अस्थिरता पर श्यानता एवं सरंध्रता के प्रभाव का अध्ययन किया है। उपर्युक्त अध्ययनों के परिप्रेक्ष्य में स्वगुरुत्वीय समांगकल्प श्यान अन्तरातारकीय माध्यम की, जिसमें धूल एवं अन्य कणों के कारण सरंध्रता होती है, स्थिरता का अध्ययन किया है।

2. निर्मेय के समीकरण

एक समांगकल्प सरंध्र माध्यम से प्रवाहित स्व गुरुत्वीय श्यान द्रव के चुम्बक-द्रवगतिकीय समीकरण निम्नानुसार हैं-

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\,\vec{\nabla}\varphi + \rho\left(\nu\,\nabla^2 \vec{v} - \frac{\nu}{k_1}\vec{v}\right) \qquad (1)$$

$$\varepsilon \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \qquad (2)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho \qquad (3)$$

$\frac{D}{Dt}$ संवाहित अवकलज है

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla$$

$\rho, \vec{v}, p, \phi, G, \nu, k, \varepsilon$ क्रमशः माध्यम का घनत्व, वेग, दाब, गुरुत्वीय विभव, सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक, गतिज श्यानता, पारगम्यता, सरंध्रता हैं।

3. रेखीकृत क्षोभ समीकरण

स्थायित्व की समस्याओं में रेखीकृत सिद्धान्त पर आधारित सामान्यतः जैसा लिया जाता है हमने माना कि क्षोभ की काल एवं दिशा पर निर्भरता निम्नानुसार है-

$$\exp\left[\,i\,(x k_x + z k_z + \sigma t)\,\right] \qquad (4)$$

k_x एवं k_z (कोई भी वास्तविक मान) क्रमशः x एवं z दिशा में तरंग संख्या हैं तथा σ क्षोभ की आवृत्ति है। प्रारम्भिक क्षोभरहित अवस्था में द्रव का वेग शून्य माना गया है। $\delta_\rho, \delta_p, \delta_\phi$ एवं $v(v_x, v_y, v_z)$ क्रमशः घनत्व, दाब, गुरुत्वीय विभव एवं वेग में क्षोभ के मान हैं।

समीकरण (1) से (3) को रेखीकृत रूप में निम्नानुसार लिखा जा सकता है-

$$\rho \, [\, i \, \sigma + v \, (k^2 + \frac{1}{k_1}) \,] \, v_x = - \frac{\partial}{\sigma \, x} (\delta \, p \,) + \rho \frac{\partial}{d \, x} (\partial \phi) + \delta \, \rho \frac{\partial \, \phi}{\partial \, x} \tag{5}$$

$$\rho \, [\, i \, \sigma + \nu \, (k^2 + \frac{1}{k_1}) \,] \, v_y = 0 \tag{6}$$

$$\rho \, [\, i \, \sigma + \nu \, (k^2 + \frac{1}{k_1}) \, v_z = - \frac{\sigma}{\sigma \, z} (\, \delta \, p \,) + \rho \frac{\partial}{\partial \, z} (\delta \, \phi \,) + \delta \, \rho \frac{\partial \, \phi}{\sigma \, z} \tag{7}$$

$$i \, \varepsilon \, \sigma \, \delta_\rho = - \rho \left[\frac{\partial \, \mathrm{v}_x}{\partial_x} + \frac{\partial \, \mathrm{v}_z}{\partial_z} \right] \tag{8}$$

$$\nabla^2 \, \delta \, \phi = -4 \, \pi \, G \, \delta_\rho \tag{9}$$

4. परिक्षेपण समीकरण

केडेज़ एवं व्रान्जेस की तकनीक के अनुसार सभी मूलभूत राशियों के प्रथम अवकलन को तुलनात्मक रूप से नगण्य मानकर उनके दूसरे अवकलज का मान कम किन्तु अचर रूप में लिया जाता है। यह मान्यता मूल अवस्था के गुरुत्वीय विभव के पॉइजन समीकरण के अनुरूप है।

v_x एवं v_z का समीकरण (5) एवं (7) से समीकरण (8) में मान रखने पर निम्नलिखित परिक्षेपण सम्बन्ध प्राप्त होता है-

$$\varepsilon \, \omega^2 + \epsilon \, \nu \, (\, k^2 + \frac{1}{k_1}) \, \omega + \Omega_J^2 = 0 \tag{10}$$

जहाँ

$$\omega = i \, \sigma \, , \, k^2 = k^2{}_x + k_z^2 \, , \, \Omega_J^2 = k^2 \, c^2 - 8 \, \pi \, G \, \rho$$

5. विवेचना

(i) प्रक्षेपण सम्बन्ध (10) द्वारा अस्थिरता का प्रतिबन्ध

$$k^2 < 8 \, \pi \, G \, \rho / C^2 \tag{11}$$

होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य है कि माध्यम की असमांगता के कारण जीन्स की कसौटी में संशोधन हो जाता है, जिसके अनुसार समांग माध्यम की अस्थिरता का प्रतिबन्ध $k_J^2 < 4\pi G\rho/C^2$ है।

इस प्रकार असमांगता क्रांतिक तरंग दैर्ध्य (λ) को एवं तद्नुसार अन्तरातारकीय बादल के क्रांतिक संहति को घटा देती है। निष्कर्ष रूप में यह कहा जा सकता है कि माध्यम की असमांगता निकाय को अस्थिर करती है। तरंग दैर्ध्यों की तुलना करने पर-

$$\lambda = 0.7\,\lambda_J \qquad (12)$$

जहाँ λ_J जीन्स का तरंग दैर्ध्य है।

(ii) समीकरण (10) द्विघातीय समीकरण है, जिसमें कोई चिन्ह परिवर्तन नहीं है, यदि-

$$\Omega_J^2 > 0$$

इस प्रतिबन्ध के साथ स्थायित्व के लिए राउथ-हुरविट्ज प्रतिबन्ध लगाने पर निकाय के स्थायित्व का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध संतुष्ट हो जाता है, जिसमें हुरविट्ज मैट्रिक्स के सभी मुख्य लघु विकर्ण (Principal diagonal minors) धनात्मक राशि है, जिससे निकाय उपगामितः स्थाई हो जाता है।

(iii) समीकरण (10) यह भी दर्शाता है कि माध्यम की श्यानता एवं सरंध्रता अस्थायित्व के प्रतिबन्ध को प्रभावित नहीं करता है, यद्यपि दोनों ही अवमन्दन प्रभाव से अस्थिरता की वृद्धि दर को घटाते हैं।

6. निष्कर्ष

माध्यम की असमांगता क्रांतिक तरंग दैर्ध्य के मान को 0.7 गुना घटाते हुए निकाय को अस्थिर करती है। यदि अस्थायित्व का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट न हो तो निकाय उपगामितः स्थाई बना रहता है। श्यानता एवं सरंध्रता अस्थिरता की वृद्धि दर को घटाते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक डॉ० एच० एस० पी० श्रीवास्तव मध्य प्रदेश विज्ञान एवं तकनीकी परिषद् के प्रति अपना आभार व्यक्त करता है, जिसने लेखक को उसकी शोध परियोजना Code No. Math -20/95 के रूप में वित्तीय सहायता प्रदान की है।

निर्देश

1. केडेज़ वी० एम० : Twenty Years of Plasma Physics, World Publishing Co., 1985, 312

2. छजलानी, आर० के० तथा संघवी, आर० के :*Astrophys Space Sci.*, 11985 133, 341.

3. जींस, जे० एच० : Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1902, 199,1

4. होहल्स के० : "Lectures on Density, Wave Theory" Springer-Verlag, Berlin, 1980.

5.श्रीवास्तव एच० एस० पी० तथा वाघेला, डी० एस० : *Vikram Math. Jour.*, 1993, 8, 51-55

6. श्रीवास्तव, एच० एस० पी० तथा वाघेला, डी० एस० : *J. Indian Acad. Math.* 1994, 16 (2), 235-239.

7. श्रीवास्तव, एच० एस० पी० तथा वाघेला, डी० एस० : *Czech Phys. Jour.* 1994, 44 (10), 905-911.

8. श्रीवास्तव, एच० एस० पी० तथा वाघेला, डी० एस० : *J. Indian Acad. Math*, 1995, 17 (2), 160-170.

9. श्रीवास्तव, एच० एस० पी० तथा वाघेला, डी० एस० (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)

10. व्रान्जेस जे० : *Astrophys. Sapce Sci.*, 1990, 173, 293.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October, 1997.

द्विदूरीक समष्टि में कतिपय स्थिर बिन्दु प्रमेय

रवीन्द्र गर्ग

गणित विभाग, उच्च शिक्षा उत्कृष्टता संस्थान, कोलार रोड,
पो० बॉ० नं० 588 रविशंकर नगर पोस्ट ऑफिस, भोपाल (म० प्र०)

तथा

एम० एस० राठौर

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय सीहोर (म० प्र०)

[प्राप्त--जुलाई 28, 1997]

सारांश

इस प्रपत्र में द्विदूरीक समष्टि में कतिपय स्थिर बिन्दु प्रमेयों को सिद्ध किया गया है।

Abstract

Some common fixed point theorems in Bimetric Spaces: *By* Ravindra Garg, Mathematics Department, Institute for Excellence in Higher Education, Kolar Road, P. B. No. 588, Ravishanker Nagar Post Office, Bhopal (M.P.) and M.S. Rathore, Mathematics Department, Govenment P. G. College, Sehore, (M.P.).

In this paper some fixed point theorems in Bimetric spaces have been proved.

प्रस्तुत प्रपत्र में हमारा मुख्य उद्देश्य द्विदूरीक समष्टि में कतिपय स्थिर बिन्दु प्रमेयों को सिद्ध करना है, जिसमें कि एक नवीन प्रकार की असमिका का उपयोग किया गया है। विगत वर्षों में मिश्रा[2], गांगुली तथा बंधोपाध्याय[1] कुरेशी, सिंह तथा बादशाह[3] आदि ने द्विदूरीक समष्टि में स्थिर बिन्दु प्रमयों को सिद्ध किया है, जिसका अनुसरण करते हुए हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं।

मुख्य परिणाम

प्रमेय : माना कि $\left(X, d_1, d_2\right)$ एक द्विदूरीक समष्टि है जिससे :

(1.1): $$d_1(x, y) \le d_2(x, y), \forall x, y \in X,$$

(1.2) : यदि T_1 तथा T_2 प्रतिचित्रण है द्विदूरीक समष्टि x के , जिससे असमिका

$$d_2\left(T_1 x, T_2 y\right) \le \frac{a\, d_2(y, T_2 y)\,[1 + a d_2(x, T_1 x)}{1 + a d_2(x, y)} + \frac{b\, d_2(y, T_1 x)\,[1 + b\, d_2(x, T_2 y)]}{1 + b\, d_2(x, y)} + \frac{c\, d_2(x, T_2 y)\,[1 + c\, d_2(x, T_1 x) + c\, d_2(y, T_1 x)]}{1 + c\, d_2(x, y)} + \frac{e\, d_2(x, T_1 x)\,[1 + e\, d_2(y, T_2 y)]}{1 + e\, d_2(T_1 x, T_2 y)} + f d_2(x, y)$$

की तुष्टि समस्त $x, y \in X$ के लिये जहाँ $0 < a + b + 2c + e + f < 1$ होती है।

(1.3) : d_1 के सापेक्ष प्रतिचित्रण T_1, T_2 बिन्दु $z \in X$ पर संतत हो,

(1.4) एक बिन्दु $X_0 \in X$ का अस्तित्व हो जिससे कि अनुक्रम $\{X_n\}$ निम्न प्रकार से परिभाषित हो

$$(*)\; x_1 = T_1 x_0,\; x_2 = T_2 x_1, \ldots,$$

$$x_{2n+1} = T_1 x_{2n}\; x_{2n+2} = T_2 x_{2n+1},\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

जिसका एक उपानुक्रम $\left\{x_{n_k}\right\}$, d_1 के सापेक्ष X के एक बिन्दु पर अभिसरित होता हो तो प्रतिचित्रणों T, T_2 का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्तिः

दिया हुआ है

$x_0 \in x$ तथा $x_{2n+1} = T_1 x_{2n}$, $x_{2n+2} = T_2 x_{2n+1}$ $n = 0.\ 1, 2, ...$

अतः

$$d_2\left(x_1, x_2\right) = d_2\left(T_1 x_0, T_2 x_1\right)$$

$$\leq \frac{ad_2(x_1, T_2 x_1)[1 + ad_2(x_0, T_1 x_0)]}{1 + ad_2(x_0, x_1)}$$

$$+ \frac{bd_2(x_1, T_1 x_0)[1 + bd_2(x_0, T_2 x_1)]}{1 + bd_2(x_0, x_1)}$$

$$+ \frac{cd_2(x_0, T_2 x_1)[1 + cd_2(x_0, T_1 x_0) + cd_2(x_1, T_1 x_0)]}{1 + cd_2(x_0, x_1)}$$

$$+ \frac{ed_2(x_0, T_1 x_0)[1 + ed_2(x_1, T_2 x_1)]}{1 + ed_2(T_1 x_0, T_2 x_1)} + f d_2(x_0, x_1)$$

$$d_2\left(x_1, x_2\right) \leq \left(\frac{c + e + f}{1 - a - c}\right) d_2\left(x_0, x_1\right)$$

इसी प्रकार

$$d_2\left(x_2, x_3\right) \leq \left(\frac{c + e + f}{1 - a - c}\right) d_2\left(x_1, x_2\right)$$

$$\leq \left(\frac{c + e + f}{1 - a - c}\right)^2 d_2\left(x_0, x_1\right)$$

और हमें आगमन (Induction) से निम्न प्राप्त होता है-

$$d_2\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \left(\frac{c + e + f}{1 - a - c}\right) d_2\left(x_0, x_1\right)$$

$\lambda = \frac{c + e + f}{1 - a - c} < 1$ लिखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$d_2\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \lambda^n d_2\left(x_0, x_1\right).$$

अब $p > 0$ के लिये

$$d_2\left(x_n, x_{n+p}\right) \leq d_2\left(x_n, x_{n+1}\right) + d_2\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \ldots + d_2\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right)$$

$$\leq \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{n+p-1}\right) d_2\left(x_0, x_1\right)$$

$$< \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\right) d_2\left(x_0, x_1\right)$$

$$\longrightarrow 0 \text{ ज्यों-ज्यों} n \rightarrow \infty,$$

अतः d_2 के सापेक्ष, $\{x_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है, चूंकि

$$d_1(x, y) \leq d_2(x, y), \forall x, y \in X,$$

इसलिये d_1 के सापेक्ष भी $\{x_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है, लेकिन $\{x_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है जो कि d_1 के सापेक्ष एक उपानुक्रम $\{x_{n_k}\}$ इस प्रकार रखता है कि $x_{n_k} \rightarrow z \in x$ इसलिये $x_n \rightarrow z$

अब हम सिद्ध करेंगे कि T_1 एवं T_2 का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z है, अर्थात्

$$T_1(z) = z = T_2(z).$$

शर्त (1.3) के द्वारा हमें प्राप्त होता है,

$$T_1(z) = T_1 \lim x_{2n} = \lim T_1 x_{2n}$$

$$= \lim x_{2n+1}$$

$$= z$$

इसी प्रकार

$$T_2(z) = z$$

अतः T_1 एवं T_2 का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z है।

उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z की अद्वितीयता सरलता से सिद्ध की जा सकती है। इस प्रकार उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय 2 :

माना कि (x, d_1, d_2) एक द्विदूरीक समष्ट है एवं मान लो $H = \{T_i : i \in I, I$ धन पूर्णांकों का एक समुच्चय$\}$ है x पर प्रतिचित्रणों का एक कुल इस प्रकार हो कि निम्नलिखित शर्तों का पालन होता हो जिसमें

(2.1): $d_1(x, y) \leq d_2(x, y), \forall x, y \in X;$

(2.2) : H में कुछ T_i का अस्तित्व इस प्रकार हो कि प्रत्येक $T_i \in H$ $(i \neq j)$ के लिये धन पूर्णांक m_i और m_j इस प्रकार हों कि

$$d_2\left(T_1^{m_i}x, T_2^{m_j}y\right) \leq \frac{a d_2(y, T_2^{m_j}y)[1 + a d_2(x, T_1^{m_i}x)]}{1 + b d_2(x, y)}$$

$$+ \frac{b d_2(y, T_1^{m_i}x)[1 + b d_2(x, T_2^{m_j}y)]}{1 + b d_2(x, y)}$$

$$+ \frac{c d_2(x, T_2^{m_j}y)[1 + c d_2(x, T_1^{m_i}x) + c d_2(y, T_1^{m_i}x)]}{1 + c d_2(x, y)}$$

$$+ \frac{e d_2(x, T_1^{m_i}x)[1 + e d_2(y, T_2^{m_j}y)]}{1 + e d_2(T_1^{m_i}x, T_2^{m_j}y)} + f d_2(x, y),$$

की तुष्टि $\forall x, y \in X$ के लिये, जहाँ $0 < a + b + 2c + e + f < 1$ होती है,

(2.3) : d_1 के सापेक्ष प्रत्येक $i \in I$ के लिये, प्रतिचित्रण $T_i \in H$ बिन्दु z पर संतत हो,

(2.4) : एक बिन्दु $x_0 \in H$ का अस्तित्व हो जिनमें कि अनुक्रम $\{x_n\}$ निम्न प्रकार से परिभाषित हो।

(**) $x_1 = T_i^{m_i}(x_0),\ x_2 = T_j^{m_j}(x_1), \ldots\ x_{2n+1} = T_i^{m_i}(x_{2n}),\ x_{2n+2} = T_j^{m_j}(x_{2n+1})$,

n = 0, 1, 2, ... , जिसका एक उपानुक्रम $\{x n_k\}$, d_2 के सापेक्ष x के एक बिन्दु z पर अभिसरित होता हो; तब H का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z होता है।

उपपत्ति : शर्त (2.2) एवं प्रमेय 1 के अनुसार यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि (**) से परिभाषित अनुक्रम $\{x n\}$, d_2के सापेक्ष एक कोशी अनुक्रम है। शर्त (2.1) के अनुसार d_1 के सापेक्ष भी अनुक्रम $\{x_n\}$एक कोशी अनुक्रम है। अब $\{x_{n_k}\}$की $z \in x$ पर अभिसारिता अनुक्रम $\{x_n\}$ की बिन्दु z पर अभिसारिता T सुनिश्चित करती है। शर्त (2.3) से हमें निम्न प्राप्त होता है—

$$T_i^{m_i}(z) = T_i^{m_i} \lim x_{2n}$$

$$= \lim T_i^{m_i} x_{2n}$$

$$= \lim x_{2n+1}$$

$$= z$$

इसी प्रकार

$$T_j^{m_j}(z) = z$$

अतः $T_i^{m_i}$ और $T_j^{m_j}$ का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z है।

यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि $T_i^{m_i}$ एवं $T_j^{m_j}$ का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z अद्वितीय है। साथ ही, T_i या T_j का स्थिर बिन्दु क्रमशः $T_i^{m_i}$ या $T_j^{m_j}$ का भी है, इसलिये H का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z है। इस तरह उपपत्ति पूर्ण हुई।

निर्देश

1. गाँगुली डी० के० तथा बंद्योपाध्याय : Bull. Cal. Math. Soc. 1991, 83, 137-145

2. मिश्रा, एस० एन० : Indian J. Pure App. Math. 1978, 9 (12),

3. कुरैशी, नोशाद अहमद, सिंह, बृजेन्द्र तथा बादशाह, वी० एच०, Acta Ciencia Indica, 1995, 21 (3) 306-308

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October, 1997.

सल्फाडिमिडीन-क्यूप्रिक ऐसीटेट संकुल

सोनिया गुप्ता, धीरज गुप्ता तथा एस० एस० गुप्ता

मोती लाल विज्ञान आदर्श महाविद्यालय, भोपाल (म० प्र०)

[प्राप्त- जून 8, 1997]

सारांश

चालकतामूलक अनुमापन, स्पेक्ट्रमी अध्ययन तथा विशलेषण आंकड़ों से ज्ञात होता है कि सल्फर औषधियों में सल्फाडिमिडीन कापर के साथ ऐल्कोहलीय माध्यम में 2:1 संकुल बनाता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (I.R.) से भी की गई है।

Abstract

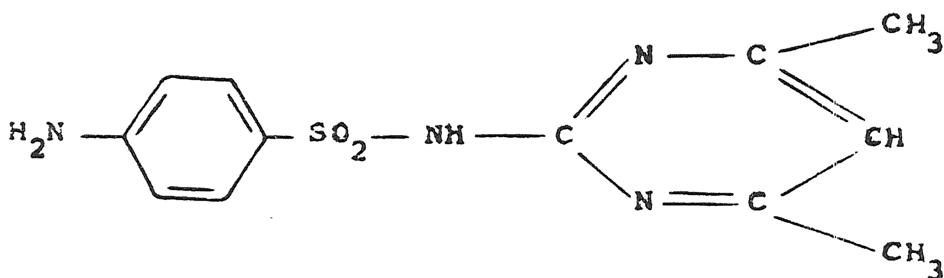
Sulphadimidine-cupric acetate complex. *By* Soniya Gupta, Dheeraj Gupta and S. S. Gupta, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Adarsh Mahavidyalaya, Bhopal (M.P.).

Sulphadimidine, a sulpha drug, forms 2:1 complex with copper in alcocholic solution as indicated by conductometric titrations, spectrophotometric studies and analytical data. Structures assigned are supported by I.R. spectral bands.

सल्फाडिमिडीन (I) (बेंजीन सल्फोनामाइड-4 अमिनो N-4,6-डाइमेथिल-2 पिरिमिडीनिल) एक सल्फर औषधि है। संक्रमण धातुएँ यथा आयरन, कोबाल्ट सिल्वर, गोल्ड, कापर आदि प्राचीन समय से ही आयुर्वेदिक, यूनानी तथा ऐलोपेथिक औषिधियों में प्रयुक्त होती रही हैं। पूर्ववर्ती कार्य[1-5] को आगे बढ़ाते हुए यहाँ हम सल्फाडिमिडीन-कापर संकुल का वर्णन कर रहे हैं। कौशल तथा सहयोगियों[6-7] ने कई धातु सल्फोनामाइड संकुल तैयार किये हैं, जिनमें से कुछ अपनी मूल औषधियों से अधिक उपयोगी सिद्ध हुए हैं।

प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन- सल्फाडिमिडीन (0.005 M) तथा क्यूप्रिक ऐसीटेट (0.01M) के मानक विलयन परिशुद्ध एल्कोहल में बनाये गये। लीगैन्ड के 10 मिली विलयन को 50 मिली तक तनु किया गया तथा धातु विलयन के साथ "तोशनीवाल" चालकतामापी द्वारा 32 से० पर अनुमापन किया गया। आयतन संशोधन के बाद चालकता तथा धात्विक आयतन के बीच ग्राफ खींचा गया (चित्र 1)। प्राप्त परिणाम 2 : 1 सल्फाडिमिडीन-कापर संकुल की पुष्टि करते हैं।



चित्र 1

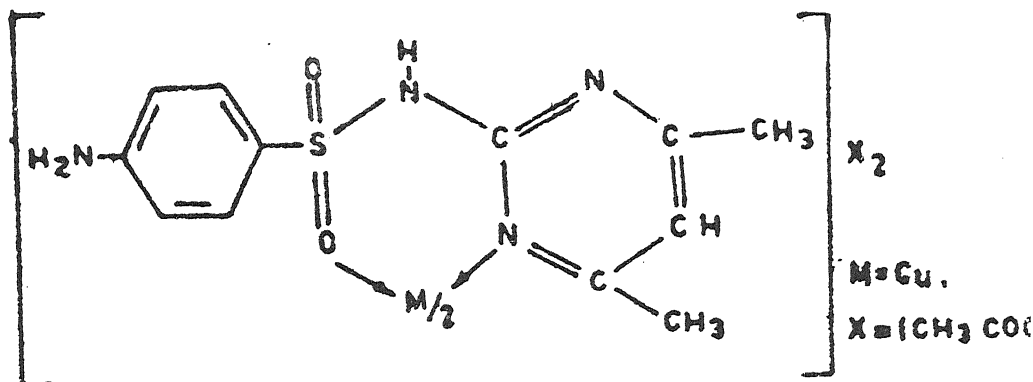
जाब[8] की संतत विचरण विधि द्वारा भी स्पेक्ट्रमीय अध्ययनों में 2 : 1 सल्फाडिमिडीन-क्यूप्रिक ऐसीटेट संकुल की पुष्टि होती है।

वियोजन तथा विश्लेषण

सल्फाडिमिडीन (2 ग्राम) तथा क्यूप्रिक ऐसीटेट (0.72 ग्राम) को अलग-अलग परिशुद्ध ऐल्कोहल में घोला गया। लिगैण्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के साथ मिलाया गया। फलस्वरूप भूरे लाल रंग का संकुल प्राप्त हुआ। मिश्रण को जलवाष्पित्र पर 1 घंटे तक पश्चबाहित किया गया। संकुल को छानकर तथा धोकर शुद्ध किया गया। प्राप्ति 1.07 ग्राम। संकुल 258^0 से० पर अपघटित 1 संकुल में Cu 8.74; N 14.6; C 44.0 तथा H 4.12% प्राप्त हुए जबकि $(C_{12} H_{14} N_4 O_2 S)_2 Cu (CH_3 COO)_2$ में सिद्धांततः Cu 8.61; N 15.18; C 45.28 तथा H 4.60% होना चाहिये।

परिणाम तथा विवेचना

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर सल्फाडिमिडीन-क्यूप्रिक ऐसीटेट संकुल की संरचना को1द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जो सल्फामेथिजोल-क्यूप्रिक क्लोराइड संरचना[9] के अनुरूप है।



संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम द्वारा भी होती है जिसमें धातु-नाइट्रोजन का अवशोषण बैंड 645 cm^{-1} पर तथा धातु आक्सीजन का अवशोषण बैंड 675 cm^{-1} पर प्राप्त होता है। सल्फाडिमिडीन कापर संकुल में ऐसीटेट की उपस्थिति 1255 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैंड से होती है। 3435 ± 5 तथा $3340 \pm 5\ cm^{-1}$ पर दो बैंड लिगैन्ड तथा संकुल में प्राप्त होते हैं जो यह बताते हैं कि समूह संकुल बनाने में भाग नहीं लेता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण शुद्ध परिमिडीन के लिये ग्रिफान लेबोरेटरी, मुम्बई के एवं शोधकार्य में सुविधाएँ प्रदान करने के लिये प्राचार्य, मोती लाल विज्ञान आदर्श महा विद्यालय, भोपाल के आभारी हैं।

निर्देश

1. गुप्ता, एस० एस०, पटेल, वी० एस० तथा गर्ग, शारदा : जर्न० साइंटिफिक रिसर्च, 1982, 4(3), 135.
2. गुप्ता, एस० एस०, पटेल, वी० एस० तथा गर्ग, शारदा : विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1983, 26 (1),73.
3. गुप्ता, एस० एस० तथा गर्ग, शारदा : विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1985, 28, 227.
4. गुप्ता, एस० एस० तथा गर्ग शारदा : जर्न० इंडियन केमि० सोसा० 1985, 62, 780
5. गुप्ता, धीरज गुप्ता, एस० एस० तथा गौर, अनुपमा : ओरिएन्टल जे० केम० 1995, 11 (3), 280.
6. पांडे, के० के० तथा कौशल, आर० : इंडियन जर्न० एप्ला० केमी० 1969, 2, 96.
7. चतुर्वेदी, के० के० तथा कौशल, आर० : जर्न० इंडियन केमि० सोसा० 1970, 47, 1135.
8. जाब, पी० : एन० किम० 1928, 10, 113.
9. गुप्ता, एस० एस०, पटेल, वी० एस० तथा गर्ग, शारदा : जर्न० इंडियन केमि० सोसा० 1983, 60, 289.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October, 1997.

परागोलीय श्रेणी की $(c, \alpha+\lambda)$ संकलनीयता

आलोक वर्मा तथा उमेश कुमार श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर विज्ञान महा विद्यालय, बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त - जून 4, 1996]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में उन परागोलीय श्रेणियों की चेजारो संकलनीयता का अध्ययन हुआ है जो इजुमी तथा सुनोची[2] एवं वैंग[5,6] के परिणामों की विस्तार देती तथा सार्वीकृत करती हैं।

Abstract

Summability $(C, \alpha+\lambda)$ of ultraspherical series. *By* Alok Verma and Umesh Kumar Shrivastava, Department of Mathematics, Govt. Science P. G. College, Bilaspur (M.P.).

In this paper the C´esaro summability of the ultraspherical series has been investigated which extend and generalize the results of Izumi and Sunouchi[2] and Wang[5,6] of Fourier series.

1. माना कि $f(\theta, \phi)$ एक फलन है जो गोला S पर परास $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, के लिए परिभाषित है। इस फलन से सम्बद्ध परागोलीय श्रेणी इस प्रकार है—

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \int_s \int \frac{p_n^{(\lambda)}(\cos\omega)\, f(\theta', \phi')\, d\sigma'}{\left[\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi')\right]^{1/2-\lambda}} \qquad (1.1)$$

$$\lambda > 0$$

जहाँ ω गोलीय दूरी है (θ, ϕ) तथा (θ', ϕ') बिन्दुओं के बीच अर्थात्

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

एवं $d\sigma' = \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi'$

लाप्लास श्रेणी (1.1) श्रेणी की विशिष्ट दशा है $\lambda = \frac{1}{2}$ के लिए जबकि सीमा ज्यों-ज्यों $\lambda \to 0$ में यह त्रिकोणभितीय श्रेणी में समानीत हो जाती है क्योंकि

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} p_n^{(\lambda)} (\cos\theta) = \frac{2}{n} \cos n\theta, \; n \geq 1. \tag{1.2}$$

परागोलीय बहुपद $P_n^{(\lambda)}(x)$ निम्नलिखित प्रसार द्वारा परिभाषित किये जाते हैं।

$$\left[1 - 2xz + z^2 \right]^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n^{(\lambda)} (x), \; \lambda > 0. \tag{1.3}$$

हम लगातार यह कल्पना करते हैं कि फलन

$$f(\theta', \phi') \left[\sin^2\theta' \, \sin^2 (\phi - \phi') \right]^{\lambda - 1/2} \tag{1.4}$$

इकाई गोले के सम्पूर्ण पृष्ठ पर समाकलनीय (L) है, कागबेतलियांट्ज[3] के अनुसार हम $f(\theta, \phi)$ के सर्वीकृत माध्यमान को निम्नवत परिभाषित करते हैं-

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi (\sin\omega)^{2\lambda}} \int_{c\omega} \frac{f(\theta', \phi') \, ds'}{\left[\sin^2\theta \sin^2 (\phi - \phi') \right]^{1/2 - \lambda}} \tag{1.5}$$

जहाँ लघु वृत्त $C\omega$ पर समाकल लिया जाता है जहाँ ds' $C\omega$ के चाप का तत्व है जहाँ पर केन्द्र (θ, ϕ) है जो गोले पर है और जिसकी वक्ररेखी त्रिज्या ω है।

सर्वत्र यह माना गया है कि फलन

$$f(\theta', \phi') \left[\sin^2\theta' \sin^2 (\phi - \phi') \right]^{\lambda - 1/2} \tag{1.6}$$

गोला S पर पूर्णतया समाकलनीय है। $k < 2$ दशा में जहाँ k चेजारो योगफल का क्रम है, हम समाकलनीयता (L) को फलन

$$\left(\cos - \frac{\omega}{2} \right)^{k - 2\lambda} f(\theta', \phi') \left[\sin^2\theta' \sin^2 (\phi - \phi') \right]^{\lambda - 1/2} \tag{1.7}$$

के सम्पूर्ण गोले पर भी कल्पित करते हैं।

हम लिखेंगे

$$\phi(\omega) = \left[f(\omega) - \frac{A\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(½)\,\Gamma(½) + \lambda)} \right] (\sin\omega)^{2\lambda};$$

$$\Phi_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} \phi(t)\,dt;$$

$$\Phi_0(x) = \Phi(x);$$

$$\phi(x) = \Gamma(p+1)\, x^{-p}\, \Phi_\pi(x),\ p \geq 0;$$

तथा

$$\Phi_\pi(x) = \frac{d}{dx}\Phi_{\pi+1}(x), -1 < p < 0.$$

लेखकों ने श्रेणी (1.1) के लिए, जो कि इज़ुमी तथा सुनोची [2] की श्रेणी के अनुरूप है, $(C, \alpha+\lambda)$ संकलनीयता के लिए एक प्रमेय प्राप्त किया है। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य श्रेणी (1.1) के लिए इज़ुमी तथा सुनोची [2] एवं वैंग[5,6] के परिणामों को विस्तृत करना तथा सर्वीकृत करना है।

हम निम्नलिखित को सिद्ध करते हैं-

प्रमेय : यदि $y > x > O,\ x \leq 1 + (y-x)$ तथा

$$\phi_x(t) = O\left(t^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)}/\alpha\right)$$

$0<\lambda<1$ के लिये

तब श्रेणी (1.1) संकलनीय $(C, \alpha+\lambda)$ है (θ, ϕ) बिन्दु पर

ज़हाँ

$$\alpha = \frac{x}{1+(y-x)}$$

2. प्रमेय की उपत्ति के लिए निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी-

प्रमेयिका 1. माना कि $S_n^k(\omega)$ श्रेणी के k के n^{th} चेजारो माध्य को प्रदर्शित करता है।

$$\sum (n+\lambda)\, p_n^{(\lambda)}\ (\cos\omega), \tag{2.1}$$

तो $\lambda > 0$ तथा $p \geq 0$, के लिए हमें प्राप्त है

$$S_n^p(\omega) = \frac{d^p\left(S_n^k(\omega)\right)}{d\omega^p}$$

$$= \begin{cases} O\left(n^{2\lambda+p+1}\right) \text{ for } O \leq \omega \leq \pi,\ k > 0 \\ O\left(\dfrac{n^{\lambda+p-k}}{\omega^{k+\lambda+1}}\right) + O\left(\dfrac{1}{n\,\omega^{2\lambda+2+p}}\right) \text{ for } O < \omega \leq a < \pi \\ O\left(\dfrac{n^{\lambda+p-k}}{\omega^{k+\lambda+1}}\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

$a < \omega \leq a < \pi$ तथा $\lambda + 1 + [p] \geq k$ के लिए

प्रमेयिका 2.

परिकल्पना (1.6) एवं (1.7) के अन्तर्गत तथा $O < \delta < \pi$, $k > \lambda$ के लिए

$$\int_S^{\pi} f(\omega)(\sin\omega)^{2\lambda} S_n^k(\omega)\, d\omega = O(1). \quad (2.1)$$

प्रमेयिका 3.

श्रेणी (1.1) संकलनीय (c, k) हो, इसके लिए पर्याप्त होगा कि समाकल

$$\int_0^S \phi(\omega)\, S_n^k\, d\omega = 0(1) \quad (2.4)$$

प्रमेयिका 4.

$O < u \leq \frac{\mu}{n^r}$ तथा $k > x$ के लिए

$$F\left(\frac{\mu}{n^r}, u\right) = \frac{1}{\Gamma(k-x)} \int_u^{\mu/n^r} S_n^k(t)(t-u)^{k-x-1}\, dt$$

$$= O\left(n^{2\lambda+k+1} u^{k-x}\right) + O\left(u^{k-x-1} n^{2\lambda+k}\right)$$

$$= O\left(u^{-x-2\lambda-1}\, n^{x-\alpha}\right) \quad (2.5)$$

इसकी उपपत्ति गुप्ता द्वारा दी गई प्रमेय[1] के समान है।

प्रमेयिका 5.

$O \le u \le \frac{\mu}{n^r}$ होने पर

$$F\left(\frac{\mu}{n^r}, u\right) = O\left(n^{2\lambda+k+1} u^{k-x}\right) + O\left(u^{k-x-1} n^{2\lambda+k+1}\right) \qquad (2.6)$$

इसकी उपपत्ति प्रमेयिका 4 से निकलती है।

प्रमेयिकां 1 तथा 3 ओब्रेचकाफ[4] की हैं और प्रेमिका के लिए कागेतलियांट्ज को देखें[3]।

3. प्रमेय की उपपत्ति

प्रमेय को सिद्ध करने के लिए यह प्रदर्शित करना पर्याप्त है कि

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^S \phi(t) S_n^{\alpha+\lambda}(t)\, dt = 0.$$ प्रमेय के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

माना कि

$$\Gamma = \frac{\alpha}{1 + \alpha + 2\lambda} \text{ और } \eta = \frac{\mu}{n^r},$$

जहाँ μ अचर है जिसे काफी वृहद रखा जाता है जिससे

$$I = \int_0^S \phi(t)\, S_n^{\alpha+\lambda}(t)\, dt = \left[\int_0^\eta + \int_\eta^S\right] \phi(t)\, S_n^{\alpha+\lambda}(t)\, dt$$

$$= I_1 + I_2, \text{ माना}$$

अब

$$|I_2| = \left| \int_\eta^S \phi(u)\, S_n^{\alpha+\lambda}(u)\, du \right| \qquad (3.1)$$

$$= O(1) \text{ ज्यों ज्यों } \mu \longrightarrow \infty$$

अब हम I_1 पर विचार करेंगे

$$I_1 = \int_0^\eta \phi(t)\, S_n^{\alpha+\lambda}(t)\, dt$$

माना कि पूर्णांक $k \geq 1$ ऐसा है कि $k-1 < x \leq k$ सर्वप्रथम हम कल्पना करें कि $k-1<x<k$

खण्डशः k बार समाकलन करने पर-

$$I_1 = \left[\sum_{\rho=1}^{k} (-1)^{\rho-1} \Phi_\rho(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^{\rho-1} S_n^{\alpha+\lambda}(t) \right]_0^\eta$$

$$+ (-1)^k \int_0^\eta \Phi_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k S_n^{\alpha+\lambda}(t)\, dt$$

$$= I_{1.1} + (-1)^k I_{1.2}\,, \text{माना}$$

यह दिखलाया जा सकता है कि

$$I_{1.1} = O(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \longrightarrow \infty \tag{3.2}$$

हम लिखेंगे कि

$$I_{1.2} = \int_0^\eta \Phi_\kappa(t)\, S_n^{(k)}(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\mu/n^r} S_n^{(k)}(t)\, dt \frac{1}{\Gamma(k-x)} \int_0^t (t-u)^{k-x-1}\, \Phi_x(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k-x)} \int_0^{\mu/n^r} \Phi_x(u)\, du \int_0^{\mu/n^r} (t-u)^{k-x-1}\, S_n^k(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\mu/n^r} \Phi_x(u)\, F(\eta, u)\, du$$

जहाँ

$$F(\eta, u) = \frac{1}{\Gamma(k-x)} \int_0^{\mu/n^r} S_n^{(k)}(t)\, (t-u)^{k-x-1}\, dt$$

अब

$$I_{1.2} = \left[\int_0^{1/n^{r'}} + \int_{1/n^{r'}}^{1/n} + \int_{1/n}^{\mu/n^r} \right] \Phi_x(u)\, F(\eta, u)\, du$$

$$= I_{1.2.1} + I_{1.2.2} + I_{1.2.3} \text{ माना}$$

जहाँ $r' = \frac{y+k}{y}$

हमें ज्ञात है कि

$$I_{1.2.1} = O\left[\int_0^{\mu/n^{r'}} u^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)/\alpha} \cdot O\left(n^{2\lambda+k+1} \cdot u^{k-x}\right) du\right]$$

$$+ O\left[\int_0^{\mu/n^{r'}} u^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)/\alpha} \cdot O\left(n^{2\lambda+k+1} \cdot u^{k-x-1}\right) du\right]$$

$$= O(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{3.3}$$

पुनश्च

$$I_{1.2.2} = O\left[\int_{1/n^{r'}}^{1/n} u^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)/\alpha} \cdot O\left(n^{2\lambda+k+1} \cdot u^{k-x} du\right]\right.$$

$$+ O\left[\int_{1/n^{r'}}^{1/n} u^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)/\alpha} \cdot O\left(n^{2\lambda+k} \cdot u^{k-x-1}\right) du\right]$$

$$I_{1.2.3} = \int_{1/n}^{\mu/n^{r}} \Phi_x(u)\ F(\eta, u)\ du$$

$$I_{1.1} = O(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \longrightarrow \infty \tag{3.4}$$

तथा

$$I_{1.2.3} = \int_{1/n}^{\mu' n^{r}} \Phi_x(u)\, F(\eta, u)\ du$$

$$= O\left[\int_{1/n}^{\mu/n^r} u^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)/\alpha}\, n^{x-\alpha}\, u^{-\alpha-2\lambda-1}\, du\right]$$

$$= O\left(n^{x-\alpha}\right)\left[u^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)/\alpha} - \alpha - 2\lambda\right]_{1/n}^{\mu/n^r}$$

$$= O\left(n^{x-\alpha}\right)\left[\frac{\mu^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda))/\alpha} - \alpha - 2\lambda}{n^r\left[y^{(\alpha+2\lambda+1/\lambda)/\alpha} - \alpha - 2\lambda\right]}\right]$$

$$+ O\left(n^{x-\alpha}\right)\left[\frac{1}{n^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)}/\alpha - \alpha - 2\lambda}\right]$$

$= I_{1.2.3.1} + I_{1.2.3.2}$, माना

अब

$$I_{1.2.3.1} = O\left(n^{x-\alpha}\right)\left[\frac{1}{n^{\alpha/(1+\alpha+2\lambda)}\left(y^{(\alpha+2\lambda+1/\lambda)}/\alpha - \alpha - 2\lambda\right)}\right]$$

$$= O\left[n^{x-\alpha-\alpha/(\alpha+1)(y-\alpha)}\right]$$

$$= O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \tag{3.5}$$

जब $y > \alpha$ तथा $\alpha = \dfrac{x}{1+(y-x)}$

तथा $$I_{1.2.3.2} = O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \longrightarrow \infty \tag{3.6}$$

फलतः

$$I_{1.2.3.2} = O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \longrightarrow \infty \tag{3.7}$$

जब $x = K$ एक पूर्णांक है ।

$$I_{1.2} = \int_0^{\mu/n^r} \Phi_x(t)\ S_n^{(x)}(t)\ dt$$

$$= \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\mu/n^r} = L_1 + L_2, \text{माना}$$

अब

$$L_1 = \int_0^{1/n} \Phi_x(t)\ S_n^{(x)}(t)\ dt$$

$$= O\left[\int_0^{1/n} u^{y[\alpha+2\lambda+1/\lambda]/\alpha}\ n^{2\lambda+x+1}\right] du$$

$$= O\left(n^{2\lambda+x+1}\right)\left[\frac{1}{n^{y[\alpha+2\lambda+1/\lambda]/\alpha+1}}\right]$$

$$= O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \tag{3.8}$$

$$L_2 = \int_{1/n}^{\mu/n^r} \Phi_x(t)\ S_n^{(x)}(t)\ dt$$

$$= O\left[\int_{1/n}^{\mu/n^r} u^{y(\alpha+2\lambda+1/\lambda)/\alpha}\ O\left(\frac{n^{x}-\alpha}{u^{\alpha+2\lambda+1}}\right) du\right]$$

$$= O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \longrightarrow \infty \tag{3.9}$$

क्योंकि $y > \alpha$ तथा $\alpha = \dfrac{x}{1+(y-x)}$ । (3.1) से लेकर (3.9) के जुटाने पर हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डॉ० जी० एस० पाण्डेय (उज्जैन) के प्रति आभार व्यक्त करते हैं जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में बहुमूल्य सुझाव दिये।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी० : Proc. Nat. Inst. Science of India, 1958, 24, 269-278.

2. इजुमी, एस० तथा सुनोची, जी०, : Tohoku Math. Journ. 1949-51, 1-2 Second series 313-326.

3. कागबेतलियांट्ज ई०, : Journ. de Mathe'matiques, 1929, 3, 107-187.

4. आब्रेचकाफ, एन०, : Rend. del Circ, Mat. di Palermo, 1936, 59, 266-287.

5. वैंग, एफ० टी०, : Annals of Maths, 1943, 44, 397-400.

6. वही, : Journ. London Math. Soc, 1947, 22, 40-47

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October, 1997.

जिप्सम उपचारित क्षारीय मृदा में रोपित धान की फसल पर ताम्र का प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र

शीलाधर मृदा विज्ञान सोध संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

तथा

अरुण कुमार चतुर्वेदी

मोती लाल नेहरू कृषक प्रशिक्षण संस्थान, फूलपुर इलाहाबाद (उ० प्र०)

[प्राप्त, सितम्बर 1, 1996]

सारांश

मोतीलाल नेहरू कृषक प्रशिक्षण संस्थान, फूलपुर, इलाहाबाद के प्रक्षेत्र पर जिप्सम उपचारित क्षारीय मृदा में रोपित धान की फसल पर ताम्र (Cu) की विभिन्न मात्राएँ (0, 10, 20, 40 किग्रा ताम्र प्रति हैक्टेअर) प्रयुक्त की गयीं। यह पाया गया कि 10 किग्रा ताम्र प्रति हैक्टेअर की दर से बेसल ड्रेसिंग करने से धान की बालियों की लम्बाई, पौधों की ऊँचाई, प्रति बाली में दोनों की संख्या में वृद्धि हुई और मृदा के कुछ सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की उपलब्धता में भी सुधार हुआ।

Abstract

Effect of copper (cu) on paddy crop in gypsum treated alkali soil. *By* S. G. Misra, Sheila Dhar Institute of Soil Science, Allahabad University and A. K. Chaturvedi, Motilal Nehru Farmers Training Instititute, Phulpur, Allahabad.

A field experiment was conducted at the Farm of Motilal Nehru Farmers Training Institute, Phulpur, Allahabad by applying four different doses of copper (0, 10, 20, 40 kg/ha) along with N_{120} + P_{60} +K_{40} on paddy transplanted in gypsum treated alkali soil. It was observed that Cu when applied @ 10 Kg/ha as basal dressing caused an increase not only in plant height, length of earhead, number of grains per earhead but also in the availability of some micronutrients of the soil. It suggests that gypsum treated alkali soil may respond to Cu addition.

भारतवर्ष में लगभग 70 लाख हैक्टेअर भूमि ऊसर की समस्या से ग्रसित है। अकेले उत्तर प्रदेश मों 12.9 लाख हैक्टेअर ऐसी ऊसर भूमि है जिसका 5.27 प्रतिशत इलाहाबाद जनपद में है। इलाहाबद की फूलपुर तहसील में इफको उर्वरक संयंत्र स्थापित होने के बाद विभिन्न तरीकों से ऊसर मिट्टी को सुधारा गया। जिप्सम के द्वरा ऊसर सुधारने के बाद भी मिट्टी में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की उपलब्धता अनिश्चित है। अतः जिप्सम उपचारित भूमि में ताम्र (Cu) सूक्ष्ममात्रिक तत्व की विभिन्न मात्राएँ डालकर धान की फसल उगाने पर धान की उपज पर क्या प्रभाव पड़ सकता है और अन्य सूक्ष्मात्रिक तत्वों की उपलब्धि किस तरह प्रभावित हो सकती है, इसके अध्ययन की आवश्यकता प्रतीत हुई।

प्रयोगात्मक

5 × 2 मीटर आकार की कुल 30 क्यारियों में नियंत्रण सहित कुल 10 उपचार तीन पुनरावृत्तियों में किये गये और नाइट्रोजन फास्फोरस तथा पोटाश की ज्ञात मात्रा (क्रमशः 120, 60, 40 किग्रा० / है०) डाली गई। प्रारम्भ में नाइट्रोजन की आधी मात्रा डाली गई किन्तु फास्फोरस तथा पोटाश की पूरी-पूरी मात्रा दी गई। मिट्टी में कापर सल्फेट के रूप में ताम्र की प्रति हेक्टेअर 10, 20 और 40 किग्रा० मात्राएँ पौध रोपण से पहले मिलाई गईं। तत्पश्चात् धान की मंसूरी किस्म रोपित की गई।

रोपण के 30 दिन बाद निर्धारित प्लाटों में ताम्र का छिड़काव और टापड्रेसिंग भी हुआ। नाइट्रोजन की शेष आधी मात्रा रोपण के 30 और 60 दिन के अन्तराल पर प्रयुक्त की गयी। विभिन्न उपचार इस प्रकार थे।

उपचार

T_0	नियंत्रण
T_1	N_{120} P_{60} K_{40} + Cu_{10} किग्रा/ है० बेसल ड्रेसिंग
T_2	N_{120} P_{60} K_{40} + Cu_{10} किग्रा/है० टॉप ड्रेसिंग
T_3	N_{120} P_{60} K_{40} + Cu_{10} किग्रा/है० स्प्रेइंग
T_4	N_{120} P_{60} K_{40} + Cu_{20} किग्रा/है० बेसल ड्रेसिंग

T_5	$N_{120}\,P_{60}\,K_{40} + Cu_{20}$ किग्रा/हे० टॉप ड्रेसिंग
T_6	$N_{120}\,P_{60}\,K_{40} + Cu_{20}$ किग्रा/हे० स्प्रेइंग
T_7	$N_{120}\,P_{60}\,K_{40} + Cu_{40}$ किग्रा/हे० बेसल ड्रेसिंग
T_8	$N_{120}\,P_{60}\,K_{40} + Cu_{40}$ किग्रा/हे० टॉप ड्रेसिंग
T_9	$N_{120}\,P_{60}\,K_{40} + Cu_{40}$ किग्रा/हे० स्प्रेइंग

समय-समय पर पौधों की ऊँचाई, बालियों की लम्बाई और प्रति बाली दानों की संख्या ज्ञात की गयी। पौध रोपण से पहले और कटाई के बाद मिट्टी में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की मात्रा ज्ञात की गयी। कटाई से प्राप्त पुआल का भी विश्लेषण किया गया। सूक्ष्ममात्रिक तत्वों का विश्लेषण केन्द्रीय प्रयोगशाला, इफको, (IFFCO) फूलपुर इकाई में एटामिक एब्जार्प्सन स्पेक्ट्रोफोटोमटर (AAS) द्वारा किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

(अ) विभिन्न उपचारों का पौधों की ऊँचाई, बालियों की लम्बाई, प्रति बाली में दानों की संख्या और उपज पर प्रभाव- सारणी 1 को देखने से यह स्पष्ट होता है कि नियंत्रण की अपेक्षा उन उपचारों में पौधों की वृद्धि अधिक हुई है जिनमें नाइट्रोजन, फास्फोरस व पोटाश के साथ 10 किग्रा० प्रति हेक्टेअर की दर से ताम्र का इस्तेमाल बेसल ड्रेसिंग और टॉप ड्रेसिंग (छिड़काव) के रूप में हुआ। अन्य सभी उपचारों में नियंत्रण की अपेक्षा बहुत कम वृद्धि हुई। एन० पी० के० की निश्चित मात्रा के साथ-साथ ताम्र की 10 किग्रा०/हेक्टेअर मात्रा बेसल ड्रेसिंग के रूप में सर्वोत्तम प्रतीत होती है।

सारणी 1

विभिन्न उपचारों का पौधों की ऊँचाई बालियों की लम्बाई और
प्रति बाली दानों की संख्या तथा उपज पर प्रभाव

उपचार	ऊँचाई सेमी०	बालियों की लम्बाई सेमी०	प्रतिबाली दानों की संख्या	बीज भार प्रतिवर्ग मीटर ग्राम
नियंत्रण	123.00	22.6	174.0	417.0
T_1	126.6	23.06	256.0	718.6
T_2	115.9	22.26	225.0	658.5
T_3	69.0	22.93	233.0	791.6
T_4	68.26	22.46	220.0	779.1

उपचार	ऊँचाई सेमी०	बालियों की लम्बाई सेमी०	प्रतिबाली दानों की संख्या	बीज भार प्रतिवर्ग मीटर ग्राम
T_5	66.20	22.4	230.0	630.5
T_6	68.73	22.46	261.0	814.8
T_7	69.06	22.40	242.0	833.8
T_8	70.0	22.86	223.0	822.0
T_9	68.06	22.93	202.0	613.50

नियंत्रण वाले उपचार को छोड़कर शेष सभी उपचारों में एन० पी० तथा के० 120, 60, 40 किग्रा०/ हेक्टेअर की दर से डाले गये।
ताम्र ($Cu\ SO_4.54_{20}$ के रूप में) की मात्राएँCu_0 Cu_{10} Cu_{20}, Cu_{40} के रूप में अंकित हैं।

यही स्थिति बालियों की लम्बाई में भी है जिसमें प्रति हेक्टेअर 10 किग्रा० ताम्र बेसल ड्रेसिंग के साथ सर्वाधिक लम्बाई मिली। अन्य में नगण्य वृद्धि हुई है। नियंत्रण की अपेक्षा अन्य सभी उपचारों में प्रति बाली दानों की संख्या अधिक है। इस दृष्टि से NPK के साथ 20 किग्रा० ताम्र प्रति हेक्टेअर का छिड़काव सर्वोत्तम पाया गया। प्रति वर्गमीटर बीज का भार भी इसी उपचार में सर्वाधिक प्राप्त हुआ।

स्पष्ट है कि पौधों की ऊँचाई तथा बालियों की लम्बाई की दृष्टि से प्रति हेक्टेअर 10 किग्रा ताम्र बेसल ड्रेसिंग के रूप में उपयुक्त है किन्तु दानों की संख्या और प्रतिवर्गमीटर बीज भार की दृष्टि से 20 किग्रा० की मात्रा का छिड़काव उपयुक्त है। इसी तरह के परिणाम कॉवर तथा जोशी [1] एवं लाल [2] को भी प्राप्त हुए। 20 क्रिग्रा से अधिक ताम्र की मात्रा का हानिकारक प्रभाव पड़ा जो सम्भवतः उसकी विषालुता के कारण है।

(ब) मृदा के रासायनिक संघटन पर प्रभाव -सारणी 2 (अ) और (ब) की तुलना करने पर निम्नलिखित निष्कर्ष निकलते हैं-

फसल कटाई के बाद पी० एच० एवं विद्युत्चालकता में कमी आई है किन्तु प्रतिशत जीवांश कार्बन, फास्फोरस, पोटाश के अलावा ताम्र, लोहा, मैंगनीज व जस्ता की उपलब्धता में वृद्धि हुई।

विभिन्न उपचारों की दृष्टि से 10 किग्रा० ताम्र की बेसल ड्रेसिंग व छिड़काव से मुख्य एवं गौण पोषक तत्वों की उपलब्धता में वृद्धि परिलक्षित हुई। अन्य उपचार सार्थक नहीं पाये गये। स्पष्टतः मृदा की रासायनिक स्थिति में सुधार दिखायी देता है जिसकी पुष्टि मेहरोत्रा तथा सक्सेना[3] के परिणामों से हो जाती है।

सारणी 2 (अ)

रोपाई के पहले मृदा का विश्लेषण

उपचार	पी०एच०	विद्युत्चालकता मिम्होज/सेमी०	जीवांश कार्बन	फास्फोरस कि०/हे०	पोटाश कि०/हे०	ताम्र ppm	आयरन ppm	मैंगनीज ppm	जिंक ppm
नियन्त्रण	8.70	0.41	0.65	60.0	913.6	0.76	3.11	4.03	1.26
T_1	8.60	0.42	0.494	38.0	813.6	1.15	3.21	4.06	1.86
T_2	8.53	0.36	0.513	25.0	717.0	1.36	3.17	3.63	1.48
T_3	8.40	0.30	0.597	48.3	597.0	1.12	4.01	4.63	1.42
T_4	8.56	0.37	0.653	48.6	795.3	1.97	4.15	3.26	1.59
T_5	8.56	0.33	0.457	64.6	827.0	1.99	2.92	4.20	1.29
T_6	8.63	0.35	0.634	43.0	707.6	2.24	3.13	3.80	1.42
T_7	8.40	0.37	0.681	38.3	720.0	2.16	3,54	4.13	1.54
T_8	8.56	0.32	0.578	46.6	958.6	2.26	3.37	3.35	1.41
T_9	8.33	0.30	0.597	50.0	714.6	1.33	3.30	3.16	1.51

सारणी 2 (ब)

फसल काटने के बाद मृदा का विश्लेषण

उपचार	पी०एच०	विद्युत्चालकता मिम्होज/सेमी०	जीवांश कार्बन	फास्फोरस कि०/हे०	पोटाश कि०/हे०	ताम्र ppm	आयरन ppm	मैंगनीज ppm	जिंक ppm
नियन्त्रण	8.23	0.35	63.3	1063.6	0.442	1.09	4.33	4.30	1.79
T_1	8.2	0.25	64.3	896.0	0.420	1.77	3.91	3.90	1.58
T_2	8.2	0.33	70.0	778.3	0.606	1.80	4.98	4.70	2.93
T_3	8.2	0.33	62.6	798.0	0.420	1.35	4.71	3.96	1.63
T_4	8.13	0.36	43.3	993.0	0.476	1.01	3.73	3.43	1.22
T_5	8.13	0.37	23.6	923.6	0.634	1.42	4.86	4.73	1.87
T_6	8.46	0.26	49.3	754.3	0.364	1.84	4.26	4.73	1.61
T_7	8.2	0.34	47.0	978.0	0.457	0.84	4.68	4.06	1.70
T_8	8.2	0.30	37.6	906.0	0.522	2.08	3.75	4.00	1.77
T_9	8.16	0.30	44.0	783.30	0.522	1.90	4.18	4.23	1.89

ताम्र के उपयोग से न केवल ताम्र की अपितु लोहा, जस्ता, मैंगनीज इन सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की उपलब्ध मात्रा में भी वृद्धि हुई। इसका कारण पी-एच० में परिवर्तन तथा फसल उगाने से उसकी जड़ों से मिट्टी की भौतिक एवं रासायनिक दशा में सुधार हो सकता है। केवल ताम्र के प्रयोग से अन्य तीन तत्वों की उपलब्धता में सुधार होने से ही धान में सार्थक वृद्धि एवं उपज हो सकी।

निर्देश

1. कॉवर, जे० एस० तथा जोशी, एम० डी० : रिसर्च बुलेटिन नं० 1, पंजाब कृषि विश्वविद्याल, लुधियाना, 1964

2. लाल, सी० : एम० एस०-सी० थिसिस, पंजाब कृषि विश्वविद्यालय, हिसार, 1968

3. मेहरोत्रा, ओ० एन० तथा सक्सेना, एच० के० : इंडियन जरनल एग्रोनामी, 1967, 12, 186-192.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October, 1997.

सार्वीकृत फलनों के लिये फूरियर श्रेणी

एस० एस० भाटी तथा सुनील जोशी

गणित विभाग, जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त - जून 23, 1994]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिये दो फूरियर श्रेणी प्रसार प्राप्त करना है।

Abstract

Fourier Series for generalized functions. *By* S. S. Bhati and Sunil Joshi, Department of Mathematics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj).

The object of this paper is to obtain two Fourier series expansions for the generalized function of two variables, which are very general in character and include as particular cases the results obtained by various authors.

1. प्रस्तावना

कतिपय विशिष्ट फलनों के लिये विभिन्न लेखकों ने[1, 2, 3, 6, 7, 9] ने फूरियर श्रेणियाँ दी हैं। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य मित्तल तथा गुप्ता[8] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिये फूरियर श्रेणी प्रसार स्थापित करना है। मित्तल तथा गुप्ता[8] का अनुसरण करके फलन $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ को द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल द्वारा निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

$$H^{O, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1, q_1 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|c} x & \left(a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1}\right) : \left(c_{p_2}, C_{p_2}\right); \left(e_{p_3}, E_{p_3}\right) \\ y & \left(b_{q_1}; B_{q_1}, \beta_{q_1}\right) : \left(d_{q_2}, D_{q_2}\right); \left(f_{q_3}, F_{q_3}\right) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} F(s, t)\, g(s)\, h(t)\, x^s y^t\, ds\, dt \qquad (1)$$

जहाँ $(a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1})$ से $(a_1; A_1, \alpha_1)$, $(a_2; A_2, \alpha_2); \ldots,$ $(a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1})$ का बोध होता है तथा

$$F(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_j + A_j s + \alpha_j t)}{\prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + B_j S + \beta_j t) \prod_{j=n_1+1}^{p_i} \Gamma(a_j - A_j s - \alpha_j t)},$$

$$g(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - D_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + C_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + D_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - C_j s)},$$

$$h(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j t)}.$$

L_1, L_2 कंटूर, संकेतन तथा (1) का अभिसरण निर्देश [8] में वर्णित हैं अतः इन्हें हम छोड़ देंगे। हमें अपने शोधकार्य में निम्नलिखित सूत्रों की आवश्यकता होगी।

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2\lambda} \sin(2n+1)\theta\, d\theta = \sqrt{\pi}\,(-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda-n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\lambda+n\right)}, \qquad (2)$$

जो $R(\lambda) > -\frac{1}{2}$ के लिए वैध है।

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^2 \operatorname{cosin}\theta\, d\theta = \sqrt{\pi} \cos\frac{n\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda-n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\lambda+n\right)} \qquad (3)$$

जो $R(\lambda) > -\frac{1}{2}$ के लिए वैध है।

(2) तथा (3) को सूत्र [4, p.12, eq. (29)]

$$\int_0^{\pi} (\sin t)^{\alpha} e^{i\beta t}\, dt = \frac{\pi}{2^{\alpha}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} e^{1/2\, i\pi\beta} \quad (4)$$

Re $(\alpha) > -1$. द्वारा व्युत्पन्न किया जा सकता है।

2. इस अनुभाग में हम (2) तथा (3) की सहायता से कतिपय समाकलों को स्थापित करेंगे। प्रथम समाकल जिसे स्थापित करना है वह है-

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2\lambda} \sin(2n+1)\theta\; H\left[\begin{matrix} x \sin^{2u}\theta \\ \\ y \sin^{2v}\theta \end{matrix}\right] d\theta$$

$$= \sqrt{\pi}\,(-1)^n\, H^{0,\, n_1+1\, :\, (m_2,\, n_2);\, (m_3,\, n_3)}_{p_1+2,\, q_1+2\, :\, [p_2,\, q_2];\, [p_3,\, q_3]}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right|$$

$$\times \left.\begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\lambda, u, v\right), (-\lambda; u, v), \left(a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1}\right) : \left(c_{p_2}, C_{p_2}\right)\left(e_{p_3}, E_{p_3}\right) \\ \left(b_{q_1}; B_{q_1}, \beta_{q_1}\right)\left(-\lambda \pm \frac{1}{2} \pm n; u, v\right) : \left(d_{q_2}, D_{q_2}\right)\left(f_{q_3}, F_{q_3}\right) \end{matrix}\right] \quad (5)$$

जो $n = 0, 1, 2,$ के लिये तथा अभिसरण के लिये वैध है।

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{p_1} (A_j) + \sum_{j=1}^{p_2} (C_j) - \sum_{j=1}^{p_1} (B_j) - \sum_{j=1}^{p_2} (D_j) < 0,$$

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{p_1} (\alpha_j) + \sum_{j=1}^{p_3} (E_j) - \sum_{j=1}^{q_1} (\beta_j) - \sum_{j=1}^{q_3} (F_j) < 0,$$

$$\lambda_2 = \sum_{j=1}^{n_1} (A_j) - \sum_{j=n_1+1}^{p_1} (A_j) - \sum_{j=1}^{q_1} (B_j) + \sum_{j=1}^{m_2} (D_j) - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} (D_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} (C_j) - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} (C_j) > 0,$$

$$|\arg x| < \frac{1}{2}\lambda_2\pi;$$

$$\mu_2 = \sum_{j=1}^{n_1}(\alpha_j) - \sum_{j=n_1+1}^{p_1}(\alpha_j) - \sum_{j=1}^{q_1}(\beta_j) + \sum_{j=1}^{m_3}(F_j) - \sum_{j=m_3+1}^{q_3}(F_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_3}(E_j) - \sum_{j=n_3+1}^{p_3}(E_j) > 0,$$

$$|\arg y| < \frac{1}{2}\mu_2\pi;$$

$$p_1 \geq n_1 \geq 0,\ p_2 \geq n_2 \geq 0,\ p_3 \geq n_3 \geq 0,\ q_1 \geq 0,\ q_2 \geq m_2 \geq 0,$$

$$q_3 \geq m_3 \geq 0,\ R\left(\lambda + u\frac{d_j}{D_j} + v\frac{f_h}{F_h}\right) > \frac{1}{2}\ (1 \leq j \leq m_2;\ 1 \leq h \leq m_3).$$

उत्पत्ति : (5) को सिद्ध करने के लिये (5) के वाम पक्ष में दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिये (1) से कंटूर समाकल रखते हैं और समाकलन के क्रम को बदलते हैं जो (5) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अनुमन्य है तथा (2) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान निकालने पर (1) की सहायता से परिणाम की व्याख्या करने पर हमें (5) की प्राप्ति होती है। इसी तरह समाकल (3) का उपयोग करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हो सकता है।

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2\lambda}\cos n\theta\ H\begin{bmatrix} x\sin^{2u}\theta \\ y\sin^{2v}\theta \end{bmatrix} d\theta \tag{6}$$

$$= \sqrt{\pi}\ \cos\frac{n\pi}{2}\ H^{0,\, n_1+2\,:\,(m_2,\, n_2);\,(m_3,\, n_3)}_{p_1+2,\, q_1+2\,:\,[p_2,\, q_2];\,[p_3,\, q_3]}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right|$$

$$\times\left.\begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\lambda;\, u,\, v\right),\ (-\lambda;\, u,\, v),\ \left(a_{p_1};\, A_{p_1},\, \alpha_{p_1}\right):\left(c_{p_2},\, C_{p_2}\right):\left(e_{p_3},\, E_{p_3}\right) \\ \left(b_{q_1};\, B_{q_1},\, \beta_{q_1}\right)\left(-\lambda \pm \frac{1}{2} \pm n;\, u,\, v\right):\left(d_{q_2};\, D_{q_2}\right);\left(f_{q_3},\, F_{q_3}\right) \end{matrix}\right] \tag{7}$$

जो $n = 0, 1, 2, \ldots; p_1 \geq n_1 \geq 0, p_2 \geq n_2 \geq 0, p_3 \geq n_3 \geq 0,$

$q_1 \geq 0, q_2 \geq m_2 \geq 0, q_3 \geq m_3 \geq 0, \lambda_1 \leq 0, \mu_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0,$

$\mu_2 > 0, |\arg x| < \frac{1}{2} \lambda_2 \pi, |\arg y| < \frac{1}{2} \mu_2 \pi,$

$$R\left(\lambda + u\frac{d_j}{D_j} + v\frac{f_h}{F_h}\right) > -\frac{1}{2}, (1 < j\ m_2;\ 1 < h < m_3),$$

के लिये वैध है जहाँ $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ एवं μ_2 (5) की ही तरह हैं।

3. निम्नलिखित फूरियर श्रेणी प्रसार सिद्ध किये जाने हैं-

$$(\sin\theta)^{2\lambda} H^{0, n_1 : (m_2, n_2) : (m_3, n_3)}_{p_1, q_1 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \sin^{2u}\theta \\ y \sin^{2v}\theta \end{matrix} \right| \tag{7}$$

$$\times \left. \begin{matrix} (a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1}) : (c_{p_2}, C_{p_2}); (e_{p_3}, E_{p_3}) \\ (b_{q_1}; B_{q_1}, \beta_{q_1}) : (d_{q_2}, D_{q_2}); (f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sin(2r+1)\theta\ H^{0, n_1+2 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+2, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right|$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\lambda; u, v\right), (-\lambda; u, v), (a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1}) : (c_{p_2}, C_{p_2}); (e_{p_3}, E_{p_3}) \\ (b_{q_1}; B_{q_1}, \beta_{q_1}) \left(-\lambda \pm \frac{1}{2} \pm r; u, v\right) : (d_{q_2}, D_{q_2}); (f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix} \right]$$

जो $n = 0, 1, 2, \ldots; p_1 \geq n_1 \geq 0, p_2 \geq n_2 \geq 0, p_3 \geq n_3 \geq 0,$

$q_1 \geq 0, q_2 \geq m_2 \geq 0, q_3 \geq m_3 \geq 0, \lambda_1 \leq 0, \mu_1 \leq 0, \lambda_2 > 0,$

$\mu_2 > 0, |\arg x| < \frac{1}{2} \lambda_2 \pi, |\arg y| < \frac{1}{2} \mu_2 \pi,$

$$R\left(\lambda + u\frac{d_j}{D_j} + v\frac{f_h}{F_h}\right) > -\frac{1}{2}\left(1 \le j \le m_2;\ 1 \le h \le m_3\right)$$

के लिये वैध है जहाँ λ_1, λ_2, μ_1 एवं μ_2 (5) ही की तरह है।

$$(\sin\theta)^{2\lambda} H^{0, n_1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1, q_1 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]}\left[\begin{matrix} x\sin^{2u}\theta \\ y\sin^{2v}\theta \end{matrix}\right| \tag{8}$$

$$\times \left.\begin{matrix}\left(a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_1\right) : \left(c_{p_2}, C_{p_2}\right); \left(e_{p_3}, E_{p_3}\right) \\ \left(b_{q_1}; B_{q_1}, \beta_{q_1}\right) : \left(d_{q_2}, D_{q_2}\right); \left(f_{q_3}, F_{q_3}\right)\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} H^{0, n_1+1 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+1, q_1+1 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| \begin{matrix} (-\lambda; u, v), \\ \left(b_{q_1}; B_{q_1}, \beta_{q_1}\right) \end{matrix}$$

$$\times \left.\begin{matrix}\left(a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1}\right) : \left(c_{p_2}, C_{p_2}\right); \left(e_{p_3}, E_{p_3}\right) \\ \left(-\frac{1}{2} - \lambda; u, v\right) : \left(d_{q_2}, D_{q_2}\right); \left(f_{q_3}, F_{q_3}\right)\end{matrix}\right]$$

$$+ 2\sum_{r=1}^{\infty} \cos\frac{r\pi}{2c} \cos r\theta\, H^{0, n_1+2 : (m_2, n_2) (m_3, n_3)}_{p_1+2, c_1+2 : [p_2, c_2]; [p_3, q_3]}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right|$$

$$\times \left.\begin{matrix}\left(\frac{1}{2} - \lambda; u, v\right), (-\lambda; u, v), \left(a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1}\right) : \left(c_{p_2}, C_{p_2}\right); \left(e_{p_3}, E_{p_3}\right) \\ \left(b_{q_1}; B_{q_1}, \beta_{q_1}\right)\left(-\lambda \pm \frac{1}{2} + r; u, v\right) : \left(d_{q_2}, D_{q_2}\right); \left(f_{q_3}, F_{q_3}\right)\end{matrix}\right]$$

अभिसरण के प्रतिबन्ध समीकरण (7) जैसे ही हैं।

उपपत्ति : माना कि

$$f(\theta) = (\sin\theta)^{2\lambda} H\left[\begin{matrix} x\sin^{2u}\theta \\ y\sin^{2v}\theta \end{matrix}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} C_r \sin(2r+1)\theta \tag{9}$$

समीकरण (9) वैध है क्योंकि $f(\theta)$ संतत है तथा अन्तराल $(0, \pi)$ में बद्ध विचरण वाला है जहाँ $R(2\lambda) > 0$। समीकरण (9) के दोनों पक्षों मे $\sin(2m+1)\theta$ से गुणा करने तथा 0 से π की सीमाओं में θ के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^\pi (\sin\theta)^{2\lambda} \sin(2m+1)\theta \, H\left[\begin{matrix} x\sin^{2u}\theta \\ y\sin^{2v}\theta \end{matrix}\right] d\theta \tag{10}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} C_r \int_0^\pi \sin(2m+1)\theta \sin(2r+1)\theta \, d\theta$$

(10) में (5) का प्रयोग करने से और कोज्या फलन के लाम्बिकता गुण को व्यवहृत करने पर

$$C_m = 2\frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}} H^{0, n_1+2 : (m_2, n_2); (m_3, n_3)}_{p_1+2, q_1+2; [p_2, c_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\lambda; u, v\right), \\ \left(b_{q_1}; B_{q_1}, \beta_{q_1}\right) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix} (-\lambda; u, v), \left(a_{p_1}; A_{p_1}, \alpha_{p_1}\right) : \left(c_{p_2}, C_{p_2}\right); \left(e_{p_3}, E_{p_3}\right) \\ \left(-\lambda \pm \frac{1}{2} \pm m; u, v\right) : \left(d_{q_2}, D_{q_2}\right); \left(f_{q_3}, F_{q_3}\right) \end{matrix}\right] \tag{11}$$

(9) तथा (11) से हमें वांछित परिणाम (7) प्राप्त होता है जो कि दो चरों वाले सार्वीकृत फलन की फूरियर श्रेणी है।

फूरियर कोटिज्या श्रेणी (8) को इसी तरह की विधि से (1) तथा (6) का प्रयोग करके सिद्ध किया जाता है।

विशिष्ट दशाएँ

$$A_{p_1}, \alpha_{p_1}, B_{q_1}, \beta_{q_1}, C_{p_2}, D_{q_2}, E_{p_3} \text{ तथा } F_{q_3}$$

एवं इन सभी अचरों को इकाई के तुल्य रखने, प्राचलों में थोड़ा विचलन करने पर सूत्र (7) तथा (8) फूरियर श्रेणी में समानीत हो जाते हैं जो दो-चरों का सार्वीकृत फलन है [1]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय जोधपुर के गणित विभाग के अध्यक्ष प्रोफेसर आर० के० सक्सेना के प्रति आभार व्यक्त करते हैं क्योंकि वे इस प्रत्र की तैयारी में लगातार प्रोत्साहन देते रहे।

निर्देश

1. एबियोडुन, आर० एफ० ए० तथा शर्मा, बी० एल०: Univ. Nac. Tucuman, Rev. 1973, 23 A, 25-33
2. बाजपेयी, एस० डी० :Proc. Cambridge Philos. Soc. 1969, 65, 703-707
3. कार्लसन, बीसी तथा ग्रीमैन, डब्लू० एच० : Duke Math. J. 1966, 33 (I), 41-44.
4. एर्डेल्यी, ए० : Higher transcendental functions. भाग I, मैकग्राहिल बुक कम्पनी न्यूयार्क, 1953
5. जैन, आर० एन० : Math. Japan, 1965, 10, 101-105
6. मैकराबर्ट, टी० एम० : Math. Z., 1961, 75, 79-82.
7. केसरवानी, आर० एन० : Composition Mat. 1966, 17 (2), 149-151.
8. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी० : Proc. Indian Acad. Sci. 1972, 75A, 117-125.
9. पराशर, बी० पी० : Proc. Cambridge Philos., Soc. 1967, 63, 1038-1085

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 40, No. 4, October 1997.

गोलीय खोल में उष्माचालन का काल उत्क्रमण निर्मेय

रचना माथुर तथा के० डी० शर्मा

गणित विभाग, डूँगर आटोनामस कालेज, बीकानेर (राजस्थान)

[प्राप्त - मार्च 8, 1994]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में गोलीय खोल में जिसे $a \leq r < b$ द्वारा परिभाषित किया जाता है और उष्मा का स्रोत जिसके भीतर हो, उष्मा चालन के काल उत्क्रमण निर्मेय की व्याख्या की गई है।

Abstract

The reversal problem of heat conduction in a spherical shell. *By* Rachna Mathur and K. D. Sharma, Department of Mathematics, Dungar Autonomous College, Bikaner (Raj.).

In the present paper the time reversal problem of heat conduction in a spherical shell defined by $a \leq r \leq b$ having source of heat within it has been discussed.

प्रस्तावना

किसी उष्माचालन निर्मेय में जब t_o समय पर ताप बंटन ज्ञात हो तो पूरे माध्यम में प्रारंभिक ताप बंटन को "ताप उत्क्रमण निर्मेय" कहते हैं। सब्बरवाल[2] ने आयत तथा बेलनाकार खोल में कतिपय ताप चालन के काल उत्क्रमण निर्मेयों की व्याख्या की है। हमने $a \leq r \leq b$ के रूप में परिभाषित एक गोलीय खोल में उष्मा चालन के काल उत्क्रमण निर्मेय पर विचार किया है जहाँ पर उष्मा का स्रोत गोलीय खोल है और विकिरण पृष्ठ $r = a$ तथा $r = b$ पर घटित होता है। काल $t = t_o$ पर क्षणिक ताप बंटन ज्ञात है और प्रारम्भिक ताप बंटन को ज्ञात किया जाता है।

निर्मेय का सूत्रीकरण

जब पृष्ठ प्रतिबन्ध ऐसे हों कि समतापी पृष्ठ समकेन्द्रिक गोले हों तो ताप केवल त्रिज्य निर्देशांक r तथा काल t पर निर्भर करता है।

इसलिए $a \le r \le b$ द्वारा परिभाषित गोलीय खोल (कोश) में उष्मा चालन का समीकरण निम्नवत् लिखा जाता है-

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right] + \phi(r, t), \qquad (1)$$

जहाँ k सामग्री की विसरणशीलता है।

$T \equiv T(r,t)$ किसी क्षण का ताप है तथा

$\phi(r,t)$ उष्मा आपूर्ति दर है प्रति इकाई समय प्रति इकाई आयतन।

ये उपयुक्त भौतिक प्रतिबन्ध इस प्रकार दिये जाते हैं-

$$\left[K_1\frac{\partial T}{\partial r} - h_1 T\right]_{r=a} = f_a(t),\ t > 0 \qquad (20)$$

$$\left[K_2\frac{\partial T}{\partial r} + h_2 T\right]_{r=b} = f_b(t),\ t > 0 \qquad (3)$$

जहाँ h_1, K_1, h_2, K_2, विकिरण अचर हैं

$$T(r,t)\Big|_{t=0} = W(r) \text{ अज्ञात } a<r<b \qquad (4)$$

$$T(r,t)\Big|_{t=t0} = V(r) \text{ ज्ञात } a<r<b \qquad (5)$$

जहाँ $V(r)$ ज्ञात ताप बंटन है t समय पर तथा $W(r)$ आरंभिक ताप बंटन है जिसे ज्ञात किया जाना है।

हल

समीकरण (1) से (5) तक

$$T(r,t) = r^{-1/2}u(r,t) \qquad (6)$$

प्रतिस्थापन का उपयोग करने पर समीकरण (1) निम्नवत् बन जाता है-

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{4r^2}u\right] + A(r, t), \quad (7)$$

उपर्युक्त समीकरण में मार्ची तथा ग्राब्लिच द्वारा प्रदत्त[1] परिवर्त का उपयोग करने पर

$$\frac{\overline{d}\,u}{d\,t} = K\left\{\frac{b^{3/2}}{K_2} S_{1/2}(c, d, \beta_1 b) f_b(t)\right.$$

$$\left. - \frac{a}{K_1} S_{1/2}(c, d, \beta_1 a) f_a(t) - \beta_1^2 \overline{u}(\beta_1 t)\right\} + \overline{A}(\beta_1, t), \quad (8)$$

जहाँ

$$\overline{A}(\beta_1, t) = \int_a^b r A(r,t) S_{1/2}(c, d, \beta_1 r)\, d r,$$

$$\overline{u}(\beta_1, t) = \int_a^b r\, u(r,t) S_{1/2}(c, d, \beta_i r)\, d r \quad (9)$$

$$A(r, t) = \gamma^{1/2} \phi(r,t) \quad (10)$$

$$B_q(c, d, \beta_a r) = J_q(A_i r)\left[Y_q(d, \beta_1 a) + Y_q(d, \beta_1 b)\right]$$

$$- Y_q(\beta_1 r)\left[J_q(c, \beta_1 a) + j_q(d, \beta_1 b)\right] \quad (11)$$

ऐसा है कि

$$J_q(s, \beta_1 r) = s_1 J_q(\beta_1 r) + s_2 J_{q'}(\beta_1 r) \quad (12)$$

$$Y_q(s, \beta_1 r) = s_1 Y_q(\beta_1 r) + s_2 \beta_{1'} Y_{q'}(\beta_1 r) \quad (13)$$

जहाँ $Jq(\beta_l r)$ एवं $Y_q(\beta_1 r)$ क्रमशः प्रथम तथा द्वितीय प्रकार एवं q कोटि के बेसेल फलन हैं $j_q(\beta_1 r)$ एवं r के प्रति क्रमशः $j_q(\beta_1 r)$ तथा $y_q(\beta_1 r)$ के अवकल गुणांक है जिसमें कि $q = \frac{1}{2}$

$$c_1 = -\left(h_1 + \frac{K_1}{2a}\right), c_2 = K_1 \tag{14}$$

$$d_1 = \left(h_2 - \frac{K_2}{2b}\right), d_2 = K_2, q = 1/2 \tag{15}$$

लाप्लास परिवर्त की सहायता से समीकरण (8) को हल करने पर

$$\bar{u}(\beta_1, t) = \overline{W}_1(\beta_1)\, e^{-K\beta_1^2 t} + \int_0^t \left[\frac{k\, b^{3/2}}{K_2} S_{1/2}(c, d, \beta_1 b) f_b(k) - \frac{K\, a^{3/2}}{K_1} S_{1/2}(c, d, \beta_1 a) f_a(x) + \overline{A}(\beta_1, x) \right\} e^{-K\beta_1^2 (t-x)}\, dx \tag{16}$$

जहाँ $$W_1(r) = \gamma^{1/2} W(r) \tag{17}$$
(A)

$$\overline{W}_1(\beta_1) = \int_a^b r\, S_{1/2}\, c, d, \beta_1, r)\; W_1(r)\, dr \tag{17B}$$

समीकरण (16) में $t = t_0$ रखने तथा प्रतिबन्ध (5) का उपयोग करने पर

$$\overline{W}_1(\beta_1) = \overline{V}_1(\beta_1)\, e^{K\beta_i^2 t_0} - e^{K\beta_1^2 t_0} \int_0^{t_0} \left[\left[\frac{K\, b^{3/2}}{K_2} S_{1/2}(c, d, \beta_1 b) f_b(x) - \frac{a^{3/2} K}{K_1} S_{1/2}(c, d, \beta_1 a) f_a(x) \right] + \overline{A}(\beta_1, x) \right\} e^{-K\beta_1^2 (t_0 - x)}\, dx \tag{18}$$

जहाँ

$$\overline{V}_1(\beta_1) = \int_a^b r\, S_{1/2}\, c, d, \beta_1, r)\; V_1(r)\, dr$$

$$V_1(r) = r^{1/2} V(r) \tag{19}$$

विशिष्ट दशाएँ

दशा 1 : यदि

$$f_a(t) = f_b(t) = 0, \ \phi(r, t) = 0$$

अर्थात्
$$A(r, t) = 0$$

तो सामान्य परिणाम (21) से प्रारंभिक ताप बंटन $w(r)$ का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है—

$$W(r) = r^{-1/2} \sum_i \left\{ S_{1/2}(c, d, \beta_1 r)/\delta_i \right\} \overline{V}_1(\beta_1) \ e^{K\beta_1^2 t_0}$$

दशा 2 : यदि हम उष्मा स्रोत फलन को

$\phi(r,t) = g(r) f(t)$ मान लें तो

$$A(r,t) = r^{1/2} g(r) f(t)$$

एवं
$$\overline{A}(\beta_1, t) = \overline{G}(\beta_1) f(t)$$

जहाँ

$$\overline{G}(\beta_1) = \int_a^b r^{2/2} g(r) S_{1/z}(c, d, \beta_1 b) \, dr$$

तो प्रारंभिक क्षणिक ताप बंटन $w(r)$, जिसे परिणाम (21) से प्राप्त किया जाता है, निम्न रूप धारण करता है

$$W(r) = r^{-1/2} \sum_i \left\{ S_{1/2}(c, d, \beta_1 r)/\delta_1 \right\} \Bigg[\overline{V}_1(\beta_1) \ e^{K\beta_1^2 t_0}$$
$$- \int_0^{t_a} \Bigg[K \frac{b^{3/2}}{K_a} S_{1/2}(c, d, \beta_1 b) f_b(k) - \frac{K_a^{\ 3/2}}{K_1} S_{1/2}(c, d, \beta_1 a) f_a(x)$$
$$+ \overline{G}(\beta_1) f(x) \Bigg] \Bigg] e^{K\beta_1^2 k} \, dx$$

समीकरण (18) में परिवर्त के विलोमन प्रमेय[1] का प्रयोग करने पर-

$$W_1(r) = \sum_1 \left(S_{1/2}\left(c, d, \beta_1 r\right)\Big/\delta_1\right)\Big[\,\overline{V}_1(\beta_1)\, e^{k\beta_i^2 t_o}$$

$$-\int_0^{t_a}\left[\frac{K b^{3/2}}{K_2} S_{1/2}(c, d, \beta_1 b)\, f_b(x) - \frac{K a^{3/2}}{K_1} S_{1/2}(c, d, \beta_1 a)\, f_a(x)\right.$$

$$\left. + \overline{A}(\beta_1, x)\right] e^{K\beta_1^2 x}\, dx \qquad (20)$$

समीकरण (20) में समीकरण (17A) का उपयोग करने पर प्रांरभिक क्षणिक ताप बंटन का मान इस प्रकार प्राप्त होता है-

$$W(r) = r^{-1/2} \sum_1 \left(S_{1/2}\left(c, d, \beta_1 r\right)\Big/\delta_1\right)\Big[\,\overline{V}_1(\beta_1)\, e^{k\beta_1^2 t_o}$$

$$-\int_0^{t_a}\left[K\,\frac{b^{3/2}}{K_2} S_{1/2}(c, d, \beta_1 b)\, f_b(x) - \frac{K a^{3/2}}{K_1} S_{1/2}(c, d, \beta_1 a)\, f_a(x)\right.$$

$$\left. + \overline{A}(\beta_1, x)\right] e^{K\beta_1^2 x}\, dx, \qquad (21)$$

जहाँ संकलन समीकरण के समस्त धन मूलों तक विस्तृत रहता है।

$$\left[c_1 J_q(\beta_1 a) + c_2 \beta_1 J'_q(\beta_1 a)\right]\left[d_1 Y_q(\beta_1 b) + d_2 \beta_1 Y'_q(\beta_1 b)\right]$$

$$= \left[d_1 J_q(\beta_1 b) + d_2 \beta_1 J'_q(\beta_1 b)\right]\left[c_1 Y_q(\beta_1 a) + c_2 \beta_1 Y'_q(\beta_1 a)\right]$$

$$\delta_1 = \frac{b^2}{2}\left[c, d, \beta_1 b) - T_{q-1}(c, d, b_1 b)\, T_{q+1}(c, d, \beta_i b)\right]$$

$$-\frac{a^2}{2}\left[S_q^2(c, d, \beta_1 a) - T_{q-1}(c, d, \beta_1 a)\, T_{q+1}(c, d, \beta_1 a)\right]$$

एवं

$$T_{q\pm 1}(c, d, \beta_1 r) = J_{q\pm 1}(\beta_1 r)\left[Y_q(c, A_1 a) + Y_q(d, \beta_1 b)\right.$$

$$\left. - Y_{q\pm 1}(\beta_i r)\left[J_q(c, A_i a) + J_q(d, \beta_i b)\right]\right]$$

$q = \frac{1}{2}$ के साथ।

दशा 3

यदि

$f_a(t) = \cos(st),\ f_b(t) = \sin(st),$ तथा $\Phi(r, t) = g(r)\, e^{-st}$

तो समीकरण (21) से प्रारंभिक क्षणिक ताप $w(r)$ का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है—

$$W(r) = r^{-1/2}\sum_{1}\left[S_{1/2}(c, d, \beta_1)/\delta 1\right] e^{K\beta_1^2 t_o}\left[\overline{V}_1(\beta_1) + \frac{K}{s^{2} + K^{2}\beta_1^2}\right.$$

$$+\left[\frac{b^{3/2}}{K_2} S_{1/2}(c, d, \beta_1 b)\left\{K\beta_1^2 \sin(st_0) - s\cos(st_0) + s\, e^{-K\beta_i^2 t_0}\right\}\right.$$

$$\left. -\frac{a}{K_1} S_{1/2}(c, d, \beta_1 a)\left\{K\beta_1^2 \cos(st_0) + s\sin(st_0) - K\beta_1^2\, e^{-k\beta_1^2 t_0}\right\}\right]$$

$$\left. + \frac{\overline{G}(\beta_1)}{(K\beta_1^2 - s)}\left\{e^{-st_0} - e^{-k\beta_1^2 t_0}\right\}\right].$$

दशा 4

यदि t_o समय पर क्षणिक ताप बंटन शून्य हो अर्थात् $v(r) = 0$ तो समीकरण (21) से प्रारंभिक क्षणिक ताप बंटन $w(r)$ को इस प्रकार लिखा जाता है-

$$W(r) = r^{-1/2}\sum_{1}\left\{S_{1/2}(c, d, \beta_1)/\delta 1\right\}\int_0^{t_0}\left[K\frac{b^{3/2}}{K_2} S_{1/2}(c, d, \beta_1 b)\, f_b(x)\right.$$

$$\left. -\frac{K a^{3/2}}{K_1} S_{1/2}(c, d, \beta_1 a)\, f_a(x) + \overline{A}(\beta_1, x)\right] e^{K\beta_1^2 x}\, dk,$$

निर्देश

1. मार्ची, ई० तथा ग्राब्लिच, जी० : *Czech. J. Phys.* 1965, B-15, 204-209.

2. सब्बरवाल, के० सी० : *Indian J. Physics*, 1965, 3, 449-450.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 60 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 15 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405